ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. Müller-Breslau-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

Band 1 Ende Oktober 1921 Heft 5

INHALT:



VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1 **Ende Oktober 1921** **Heft 5**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Beitrag zur Berechnung räumlicher Fachwerke von zyklischer Symmetrie mit biegungssteifen Ringen und Meridianen.

Von **W. KAUFMANN** in Hannover.

Bekanntlich setzt die auf den Gleichgewichtsbedingungen aufgebaute statische Berechnung räumlicher Fachwerke in den Knotenpunkten reibungslose Kugelgelenke voraus. Nun ist aber bekannt, daß sich derartige Fachwerke ohne jede Versteifung zur Aufnahme von einseitig wirkenden Lasten wenig eignen, da sie vielfach starken Formänderungen unterliegen. Um hier Abhilfe zu schaffen, geht man häufig dazu über, biegungssteife Stockwerkringe oder — besonders bei Schwedlerkuppeln — biegungssteife Meridiane (Sparren) oder auch beides gleichzeitig zu verwenden, ohne sich indessen in den meisten Fällen über die dadurch bedingten Spannungsänderungen in den Fachwerkstäben Rechenschaft abzulegen. Das System wird durch diese Aenderungen hochgradig statisch unbestimmt und seine genaue Berechnung meistens recht umständlich und zeitraubend. Da in solchen Fällen eine große Anzahl von Elastizitätsgleichungen vorliegt, so ist deren Auflösung mit Hülfe von Determinanten im allgemeinen nicht zu empfehlen. Handelt es sich jedoch um Fachwerke von zyklischer Symmetrie, so gestattet gerade diese Methode eine einfache Berechnung der Unbekannten, da dann Determinanten entstehen, die eine bequeme Auswertung in geschlossener Form ermöglichen, wie nachstehend gezeigt werden soll.

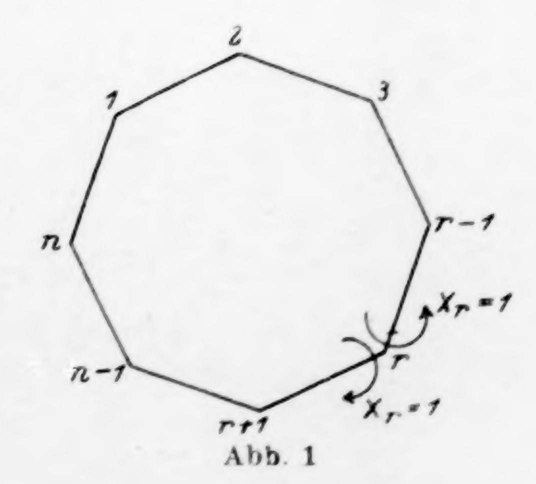


Abb. 1

I. Entwicklung des allgemeinen Rechnungsganges.

1. Ein in seiner Ebene biegungssteifer Schluß- oder Mittelring. Das in Abb. 1 skizzierte regelmäßige n-Eck möge einen ebenen Stockwerkring eines zyklisch symmetrischen Raumfachwerks darstellen. Dieser Ring

sei zur Erhöhung der Steifigkeit des räumlichen Tragsystems durch entsprechende Eckverbindungen in der Zeichnungsebene biegungssteif ausgebildet, wodurch die statische Bestimmtheit des Systems, die wir als vorher vorhanden voraussetzen, aufgehoben wird. Zur Ermittlung der so entstehenden unbestimmten Größen denke man sich in den Eckpunkten Gelenke angeordnet und bringe zur Wiederherstellung des wirklichen Zustandes in den Ecken die daselbst wirkenden unbekannten Momente als äußere Belastung an. (Abb. 1 zeigt den Zustand $X_r = 1$). Dann gelten die allgemeinen Elastizitätsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{21} + X_3\delta_{31} + \ldots\ldots + X_n\delta_{n1} = c_1 \\ X_1\delta_{12} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{32} + \ldots\ldots + X_n\delta_{n2} = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1\delta_{1n} + X_2\delta_{2n} + X_3\delta_{3n} + \ldots\ldots + X_n\delta_{nn} = c_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Infolge der hier vorausgesetzten zyklischen Symmetrie ist aber, wie leicht ersichtlich:

$$\begin{array}{l} \delta_{11} = \delta_{22} = \ldots\ldots = \delta_{rr} \quad = \alpha_1 \\ \delta_{21} = \delta_{32} = \ldots\ldots = \delta_{r(r-1)} = \alpha_2 \\ \delta_{31} = \delta_{42} = \ldots\ldots = \delta_{r(r-2)} = \alpha_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

so daß die Nennerdeterminante des Gleichungssystems (1) folgende Form annimmt:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \ldots & \alpha_1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Gl. (2) stellt eine zyklische Determinante $n$ter Ordnung dar, deren Auflösung bekannt ist[1]). Danach wird der absolute Wert von D:

$$D = \varphi(\alpha, z_0)\,\varphi(\alpha, z_1)\,\varphi(\alpha, z_2)\ \ldots\ldots\ \varphi(\alpha, z_{n-1}) \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

wobei $\varphi(\alpha, z_0)$, $\varphi(\alpha, z_1)$ .... n Faktoren darstellen, die aus den Elementen der Determinante D mit Hilfe der $n$ten Einheitswurzeln rational zusammengesetzt sind. Allgemein ist zu setzen:

$$\varphi(\alpha, z_k) = \alpha_1 + \alpha_2 z_k + \alpha_3 z_k^2 + \ldots\ldots + \alpha_n z_k^{n-1} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und zwar sind $z_0, z_1, z_2 \ldots . z_{n-1}$ die n Wurzeln der binomischen Gleichung $z^n - 1 = 0$.

Für diese gilt

$$z_k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i \sin k\frac{2\pi}{n}; \qquad (k \text{ von } 0 \text{ bis } n-1) \ldots . \quad (5).$$

Da nun infolge des Maxwellschen Satzes allgemein $\delta_{nm} = \delta_{mn}$ ist, so wird

$$\alpha_2 = \alpha_n, \ \alpha_3 = \alpha_{n-1}, \ \alpha_4 = \alpha_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

weshalb Gl. (4) bei geradem n übergeht in

$$\varphi(\alpha, z_k) = \alpha_1 + \alpha_2(z_k + z_k^{n-1}) + \ldots . + \alpha_{\frac{n}{2}}\left(z_k^{\frac{n}{2}-1} + z_k^{\frac{n}{2}+1}\right) + \alpha_{\frac{n}{2}+1} z_k^{\frac{n}{2}} \quad (7);$$

und bei ungeradem n in

$$\varphi(\alpha, z_k) = \alpha_1 + \alpha_2(z_k + z_k^{n-1}) + \ldots\ldots + \alpha_{\frac{n+1}{2}}\left(z_k^{\frac{n-1}{2}} + z_k^{\frac{n+1}{2}}\right) \quad . \ . \quad (7\text{a})$$

Nun ist aber

$$z_k^r + z_k^{n-r} = \cos rk\frac{2\pi}{n} + i \sin rk\frac{2\pi}{n} + \cos(n-r)k\frac{2\pi}{n} + i \sin(n-r)k\frac{2\pi}{n}$$
$$= 2\cos rk\frac{2\pi}{n}.$$

Demnach wird weiter bei geradem n:

$$\varphi(\alpha, z_k) = \alpha_1 + 2\sum_{r=1}^{r=\frac{n}{2}-1} \alpha_{r+1} \cos rk\frac{2\pi}{n} + \alpha_{\frac{n}{2}+1}(-1)^k \quad \ldots . \quad (8).$$

---

[1]) E. Pascal, Die Determinanten, deutsch von H. Leitzmann, Leipzig 1900, S. 71 u. f.

und bei ungeradem n:

$$\varphi(\alpha, z_k) = \alpha_1 + 2 \sum_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \alpha_{r+1} \cos r k \frac{2\pi}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,\mathrm{a}).$$

Aus $\cos r \frac{2\pi}{n} = \cos(n-1) r \frac{2\pi}{n}$ ergibt sich $\varphi(\alpha, z_1) = \varphi(\alpha, z_{n-1})$, $\varphi(\alpha, z_2) = \varphi(\alpha, z_{n-2})$ . . . . Damit geht Gl. (3) über in

$$D = \varphi(\alpha, z_0)\left[\varphi(\alpha, z_1)\varphi(\alpha, z_2) \ldots\ldots \varphi\left(\alpha, z_{\frac{n}{2}-1}\right)\right]^2 \varphi\left(\alpha, z_{\frac{n}{2}}\right) \quad . \quad . \quad (9),$$

bei geradem n, bezw.

$$D = \varphi(\alpha, z_0)\left[\varphi(\alpha, z_1)\varphi(\alpha, z_2) \ldots\ldots \varphi\left(\alpha, z_{\frac{n-1}{2}}\right)\right]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,\mathrm{a}),$$

bei ungeradem n.

Es mögen nun U_1, U_n, U_{n-1} . . . . U_2 die zu den Elementen der ersten Spalte α_1, α_n, α_{n-1} . . . . α_2 der Determinante D Gl. (2) gehörigen Unterdeterminanten (Minoren) bezeichnen. Dann sind, wie in der oben angeführten Quelle nachgewiesen ist, die Unterdeterminanten aller Elemente mit gleichem Index einander gleich. Da ferner mit Rücksicht auf Gl. (6) D bei geradem n folgende Form annimmt:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_{\frac{n}{2}+1} & \alpha_{\frac{n}{2}} & \alpha_{\frac{n}{2}-1} & \ldots & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{\frac{n}{2}+1} & \alpha_{\frac{n}{2}} & \alpha_{\frac{n}{2}-1} & \ldots & \alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{\frac{n}{2}+1} & \alpha_{\frac{n}{2}} & \alpha_{\frac{n}{2}-1} & \ldots & \alpha_5 & \alpha_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \ldots & \alpha_{\frac{n}{2}+1} & \alpha_{\frac{n}{2}} & \alpha_{\frac{n}{2}-1} & \ldots & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \ldots & \alpha_{\frac{n}{2}+1} & \alpha_{\frac{n}{2}} & \alpha_{\frac{n}{2}-1} & \ldots & \alpha_2 & \alpha_1 \end{vmatrix} \quad . \quad (10),$$

so ist z. B. U_2 durch den punktierten Linienzug (.........) gegeben. Desgleichen läßt sich U_n durch den vollen (———) Linienzug von D abgrenzen, wenn man beachtet, daß $\alpha_n = \alpha_2$ gesetzt wurde. Man erkennt, daß die erste Zeile von U_2 gleich der letzten von U_n in umgekehrter Reihenfolge ist bezw. die zweite gleich der vorletzten usw. Durch entsprechende Vertauschung der Spalten untereinander und der Zeilen untereinander kann U_2 in U_n übergeführt werden, so daß $U_2 = (-1)^\lambda\, U_n$ wird, wobei λ die Anzahl der Permutationen ist. Da aber ebenso viele Spalten- als Zeilenvertauschungen erforderlich sind, so muß λ eine gerade Zahl sein, weshalb

$$U_2 = U_n, \qquad U_3 = U_{n-1}, \qquad U_r = U_{n-r+2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Differenziert man jetzt die Determinante (10) partiell nach den Elementen α_1, α_2, ... $\alpha_{\frac{n}{2}+1}$, so findet man infolge dieser Gleichheit der Unterdeterminanten

$$U_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial D}{\partial \alpha_1}\,{}^{1)}, \qquad U_r = \frac{1}{2n}\frac{\partial D}{\partial \alpha_r}\left(r = 2,\ 3,\ 4 \ldots \frac{n}{2}\right), \qquad U_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{n}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{\frac{n}{2}+1}} \quad (12.)$$

Man erhält also unter Berücksichtigung von (9), wenn ν für $\frac{n}{2}$ gesetzt wird:

$$U_1 = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial \varphi(\alpha, z_0)}{\partial \alpha_1}\{\varphi(\alpha, z_1)\,\varphi(\alpha, z_2) \ldots \varphi(\alpha, z_{\nu-1})\}^2\,\varphi(\alpha, z_\nu)\right.$$

$$+ \frac{\partial\{\varphi(\alpha, z_1)\}^2}{\partial \alpha_1}\,\varphi(\alpha, z_0)\,\{\varphi(\alpha, z_2)\,\varphi(\alpha, z_3) \ldots \varphi(\alpha, z_{\nu-1})\}^2\,\varphi(\alpha, z_\nu) + \ldots,$$

$$\left. + \frac{\partial \varphi(\alpha, z_\nu)}{\partial \alpha_1}\,\varphi(\alpha, z_0)\,\{\varphi(\alpha, z_1)\,\varphi(\alpha, z_2) \ldots \varphi(\alpha, z_{\nu-1})\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} D\left[\frac{1}{\varphi(\alpha, z_0)} + 2\left\{\frac{1}{\varphi(\alpha, z_1)} + \frac{1}{\varphi(\alpha, z_2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(\alpha, z_{\nu-1})}\right\} + \frac{1}{\varphi(\alpha, z_\nu)}\right],$$

---

[1] Vergl. auch Hertwig, Beziehungen zwischen Symmetrie und Determinanten in einigen Aufgaben der Fachwerktheorie; Wüllner-Festschrift der Techn. Hochschule zu Aachen, Leipzig 1905, S. 194.

worin

$$\varphi(\alpha, z_0) = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_\nu) + \alpha_{\nu+1} = a_0$$

und

$$\varphi(\alpha, z_\nu) = \alpha_1 - 2\{\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \dots - \alpha_\nu(-1)^{\nu-1}\} + \alpha_{\nu+1}(-1)^\nu = a_\nu$$

oder

$$\frac{U_1}{D} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_\nu} + 2\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\frac{1}{\varphi(\alpha, z_k)}\right\} \quad \dots \dots \dots (13).$$

Weiter ist:

$$U_r = \frac{1}{2n} D \left[\frac{2}{\varphi(\alpha z_0)} + 2\left\{\frac{2\cos(r-1)\frac{2\pi}{n}}{\varphi(\alpha, z_1)} + \frac{2\cos(r-1)\frac{4\pi}{n}}{\varphi(\alpha, z_2)} + \dots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2\cos(r-1)\frac{n-2}{n}\pi}{\varphi(\alpha, z_{\nu-1})}\right\} + \frac{2(-1)^{r-1}}{\varphi(\alpha, z_\nu)}\right]$$

oder

$$\frac{U_r}{D} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{a_0} + \frac{(-1)^{r-1}}{a_\nu} + 2\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\frac{\cos(r-1)k\frac{2\pi}{n}}{\varphi(\alpha, z_k)}\right\} \quad \dots \dots (14).$$

Endlich ist

$$U_{\nu+1} = \frac{1}{n} D \left[\frac{1}{\varphi(\alpha, z_0)} + 2\left\{\frac{-1}{\varphi(\alpha, z_1)} + \frac{1}{\varphi(\alpha, z_2)} - \frac{1}{\varphi(\alpha, z_3)} + \dots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\varphi(\alpha, z_{\nu-1})}\right\} + \frac{(-1)^\nu}{\varphi(\alpha, z_\nu)}\right]$$

oder

$$\frac{U_{\nu+1}}{D} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{a_0} + \frac{(-1)^\nu}{a_\nu} + 2\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\frac{(-1)^k}{\varphi(\alpha, z_k)}\right\} \quad \dots \dots (15).$$

Man erkennt, daß Gl. (14) den allgemeinen Ausdruck für die Unterdeterminanten U_1 bis $U_{\nu+1}$ darstellt, wenn n eine gerade Zahl ist, da sie die Gleichungen (13) und (15) in sich enthält. In ganz analoger Weise findet man bei ungeradem n:

$$\frac{U_r}{D} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{a_0'} + 2\sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}}\frac{\cos(r-1)k\frac{2\pi}{n}}{\varphi(\alpha, z_k)}\right\} \quad \dots \dots (16).$$

Hierbei ist $\varphi(\alpha, z_k)$ aus Gl. (8a) einzuführen, welche für $k = 0$ liefert:

$$\varphi(\alpha, z_0) = a_0' = \alpha_1 + 2\left(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{\frac{n+1}{2}}\right).$$

Mit Hilfe der so gefundenen Minoren lassen sich jetzt die Zählerdeterminanten und damit die statisch unbestimmten Größen des Gleichungssystems (1) sofort anschreiben. Man erhält bei geradem n:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{D}\left\{c_1 U_1 + (c_2 + c_n) U_2 + (c_2 + c_{n-1}) U_3 + \dots + c_{\frac{n}{2}+1} U_{\frac{n}{2}+1}\right\} \\
X_2 &= \frac{1}{D}\left\{c_2 U_1 + (c_3 + c_1) U_2 + (c_4 + c_n) U_3 + \dots + c_{\frac{n}{2}+2} U_{\frac{n}{2}+1}\right\} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X_n &= \frac{1}{D}\left\{c_n U_1 + (c_1 + c_{n-1}) U_2 + (c_2 + c_{n-2}) U_3 + \dots + c_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n}{2}+1}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

und bei ungeradem n:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{D}\left\{c_1 U_1 + (c_2 + c_n) U_2 + (c_3 + c_{n-1}) U_3 + \dots + \left(c_{\frac{n+1}{2}} + c_{\frac{n+3}{2}}\right) U_{\frac{n+1}{2}}\right\} \\
X_2 &= \frac{1}{D}\left\{c_2 U_1 + (c_3 + c_1) U_2 + (c_4 + c_n) U_3 + \dots + \left(c_{\frac{n+3}{2}} + c_{\frac{n+5}{2}}\right) U_{\frac{n+1}{2}}\right\} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X_n &= \frac{1}{D}\left\{c_n U_1 + (c_1 + c_{n-1}) U_2 + (c_2 + c_{n-2}) U_3 + \dots + \left(c_{\frac{n-1}{2}} + c_{\frac{n+1}{2}}\right) U_{\frac{n+1}{2}}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (18).$$

In diesen Gleichungen sind die Größen c aus der äußeren Belastung bekannt, denn es ist allgemein unter Vernachlässigung etwaiger Lagerverschiebungen und Temperaturänderungen:

$$c_r = -\left(\Sigma S_o S_r \varrho + \int \frac{M_o M_r \, dx}{E J}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

wenn S_o bezw. M_o die Stabkräfte und Momente infolge der äußeren Belastung am statisch bestimmten Hauptsystem, S_r und M_r die Stabkräfte und Momente infolge des Zustandes $X_r = 1$ und ϱ die Quotienten $\frac{s}{EF}$ angeben (s Stablänge, F Querschnitt, E Elastizitätszahl). Für die Elemente α der Nennerdeterminante gilt allgemein, wenn $r \geqq i$ gewählt wird,

$$\alpha_i = \delta_{r(r-i+1)} = \Sigma S_r S_{(r-i+1)} \varrho + \int \frac{M_r M_{(r-i+1)} \, dx}{EJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Sind die α-Werte bekannt, dann können unter Beachtung der Gleichungen (14) und (16) auch die Quotienten $\frac{U}{D}$ berechnet und in die Bestimmungsgleichungen für X eingeführt werden.

2. Zwei in ihrer Ebene biegungsfeste Ringe. Das in Abb. 2 im Grundriß dargestellte Fachwerk möge einen biegungssteifen Schluß- und Mittelring haben. Ordnet man wieder in den Ringecken Gelenke an und führt in gleicher Weise wie unter I die unbekannten Momente als Belastung ein, so entstehen folgende Elastizitätsgleichungen:

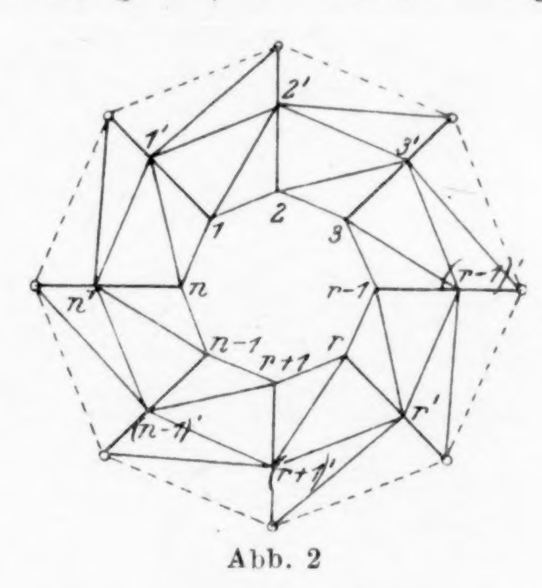


Abb. 2

$$\left.\begin{array}{l}
X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + \ldots + X_n \delta_{n1} + X_1' \delta_1'{}_1 + X_2' \delta_2'{}_1 + \ldots + X_n' \delta_n'{}_1 = d_1 \\
X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} + \ldots + X_n \delta_{n2} + X_1' \delta_1'{}_2 + X_2' \delta_2'{}_2 + \ldots + X_n' \delta_n'{}_2 = d_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_1 \delta_{1n} + X_2 \delta_{2n} + \ldots + X_n \delta_{nn} + X_1' \delta_1'{}_n + X_2' \delta_2'{}_n + \ldots + X_n' \delta_n'{}_n = d_n \\
X_1 \delta_{11}' + X_2 \delta_{21}' + \ldots + X_n \delta_{n1}' + X_1' \delta_1'{}_1' + X_2' \delta_2'{}_1' + \ldots + X_n' \delta_n'{}_1' = d_1' \\
X_1 \delta_{12}' + X_2 \delta_{22}' + \ldots + X_n \delta_{n2}' + X_1' \delta_1'{}_2' + X_2' \delta_2'{}_2' + \ldots + X_n' \delta_n'{}_2' = d_2' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_1 \delta_{1n}' + X_2 \delta_{2n}' + \ldots + X_n \delta_{nn}' + X_1' \delta_1'{}_n' + X_2' \delta_2'{}_n' + \ldots + X_n' \delta_n'{}_n' = d_n'
\end{array}\right\} \quad (21).$$

Setzt man wieder

$$\begin{array}{l}
\delta_{11} = \delta_{22} = \ldots = \delta_{rr} = \alpha_1 \\
\delta_{21} = \delta_{32} = \ldots = \delta_{r(r-1)} = \alpha_2 \\
\delta_{31} = \delta_{42} = \ldots = \delta_{r(r-2)} = \alpha_3
\end{array}$$

und entsprechend

$$\begin{array}{l}
\delta_1'{}_1 = \delta_2'{}_2 = \ldots = \delta_{r'r} = \beta_1 \\
\delta_2'{}_1 = \delta_3'{}_2 = \ldots = \delta_{r'(r-1)} = \beta_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{11}' = \delta_{22}' = \ldots = \delta_{rr'} = \gamma_1 \\
\delta_{21}' = \delta_{32}' = \ldots = \delta_{r(r-1)'} = \gamma_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_1'{}_1' = \delta_2'{}_2' = \ldots = \delta_{r'r'} = \delta_1 \\
\delta_2'{}_1' = \delta_3'{}_2' = \ldots = \delta_{r'(r-1)'} = \delta_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

so gelten auch hier für die α-Werte die Gleichungen (6) und für die δ-Werte analoge Beziehungen. Nach dem Maxwellschen Satz ist aber ferner:

$$\beta_1 = \gamma_1,\ \beta_2 = \gamma_n,\ \beta_3 = \gamma_{n-1} \ldots,\ \beta_n = \gamma_2 \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Die Nennerdeterminante des vorliegenden Gleichungssystems (21) nimmt demnach folgende Form an:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_3 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_4 & \alpha_3 & \beta_n & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_5 & \alpha_4 & \beta_{n-1} & \beta_n & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-3} & \beta_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \ldots & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \ldots & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \ldots & \beta_n & \beta_1 \\ \beta_1 & \beta_n & \beta_{n-1} & \ldots & \beta_3 & \beta_2 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \ldots & \delta_3 & \delta_2 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_n & \ldots & \beta_4 & \beta_3 & \delta_2 & \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_4 & \delta_3 \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \ldots & \beta_5 & \beta_4 & \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 & \ldots & \delta_5 & \delta_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \ldots & \beta_1 & \beta_n & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \ldots & \delta_1 & \delta_2 \\ \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \ldots & \beta_2 & \beta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \ldots & \delta_2 & \delta_1 \end{vmatrix} \quad . \quad (23).$$

Diese Determinante ist von der Ordnung $2n$, sie ist aber nicht mehr zyklisch. Indessen läßt sich auch hier eine brauchbare allgemeine Lösung angeben. Um zu dieser zu gelangen, soll zunächst die entsprechende Determinante von der Ordnung $2 \cdot 4$ untersucht werden. Diese lautet:

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 \\ \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_2 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 & \delta_2 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 & \delta_2 \\ \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 \end{vmatrix}$$

Sie möge, wie folgt, umgeformt werden: Die erste Spalte wird gebildet durch Addition der 1., 2., 3., 4., und die 5. Spalte durch Addition der 5., 6., 7., 8., während die übrigen Spalten bestehen bleiber. In der so transformierten Determinante, die ihren Wert durch diese Operation nicht geändert hat, behält man die erste Zeile bei, während man nacheinander die erste von der 2., 3. und 4. Zeile subtrahiert und ebenso die 5. von der 6.. 7. und 8., so daß $\varDelta'$ jetzt folgende Form annimmt::

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_3 - \alpha_2 & 0 & \beta_1 - \beta_2 & \beta_2 - \beta_3 & \beta_3 - \beta_4 \\ 0 & 0 & \alpha_1 - \alpha_3 & 0 & 0 & \beta_4 - \beta_2 & \beta_1 - \beta_3 & \beta_2 - \beta_4 \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 & 0 & \beta_3 - \beta_2 & \beta_4 - \beta_3 & \beta_1 - \beta_4 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_2 \\ 0 & \beta_1 - \beta_4 & \beta_4 - \beta_3 & \beta_3 - \beta_2 & 0 & \delta_1 - \delta_2 & \delta_2 - \delta_3 & \delta_3 - \delta_2 \\ 0 & \beta_2 - \beta_4 & \beta_1 - \beta_3 & \beta_4 - \beta_2 & 0 & 0 & \delta_1 - \delta_3 & 0 \\ 0 & \beta_3 - \beta_4 & \beta_2 - \beta_3 & \beta_1 - \beta_2 & 0 & \delta_3 - \delta_2 & \delta_2 - \delta_3 & \delta_1 - \delta_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)(\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)^2 \varDelta'',$$

wobei

$$\varDelta'' = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_3 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 & \beta_2 - \beta_3 & \beta_3 - \beta_4 \\ 0 & \alpha_1 - \alpha_3 & 0 & \beta_4 - \beta_2 & \beta_1 - \beta_3 & \beta_2 - \beta_4 \\ \alpha_3 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_3 - \beta_2 & \beta_4 - \beta_3 & \beta_1 - \beta_4 \\ \beta_1 - \beta_4 & \beta_4 - \beta_3 & \beta_3 - \beta_2 & \delta_1 - \delta_2 & \delta_2 - \delta_3 & \delta_3 - \delta_2 \\ \beta_2 - \beta_4 & \beta_1 - \beta_3 & \beta_4 - \beta_2 & 0 & \delta_1 - \delta_3 & 0 \\ \beta_3 - \beta_4 & \beta_2 - \beta_3 & \beta_1 - \beta_2 & \delta_3 - \delta_2 & \delta_2 - \delta_3 & \delta_1 - \delta_2 \end{vmatrix}$$

Addiert man nun in vorstehender Determinante $\varDelta''$ die 3. Spalte zur 1., ferner die 6. zur 4., und subtrahiert darauf in der so umgeformten Determinante die 1. Zeile von der 3. und die 4. Zeile von der 6., so erhält man:

$$\varDelta'' = \begin{vmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_3 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 & \beta_2 - \beta_3 & \beta_3 - \beta_4 \\ 0 & \alpha_1 - \alpha_3 & 0 & 0 & \beta_1 - \beta_3 & \beta_2 - \beta_4 \\ 0 & 0 & \alpha_1 - \alpha_3 & 0 & \beta_4 - \beta_2 & \beta_1 - \beta_3 \\ \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_3 & \beta_4 - \beta_3 & \beta_3 - \beta_2 & \delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3 & \delta_2 - \delta_3 & \delta_3 - \delta_2 \\ 0 & \beta_1 - \beta_3 & \beta_4 - \beta_2 & 0 & \delta_1 - \delta_3 & 0 \\ 0 & \beta_2 - \beta_4 & \beta_1 - \beta_3 & 0 & 0 & \delta_1 - \delta_3 \end{vmatrix}$$

oder

$$\Delta'' = (\alpha_1 - 2\,\alpha_2 + \alpha_3)\,(\delta_1 - 2\,\delta_2 + \delta_3) - (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4)^2 \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 & 0 & \beta_1 - \beta_3 & \beta_2 - \beta_4 \\ 0 & \alpha_1 - \alpha_3 & \beta_4 - \beta_2 & \beta_1 - \beta_3 \\ \beta_1 - \beta_3 & \beta_4 - \beta_2 & \delta_1 - \delta_3 & 0 \\ \beta_2 - \beta_4 & \beta_1 - \beta_3 & 0 & \delta_1 - \delta_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_1 - 2\,\alpha_2 + \alpha_3)\,(\delta_1 - 2\,\delta_2 + \delta_3) - (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4)^2\,\Delta'''.$$

Zur Auflösung von Δ''' addiere man den i-fachen Wert ($i = \sqrt{-1}$) der 2. Spalte zur 1. und den i-fachen Wert der 4. zur 3., und vertausche dann in der so umgeformten Determinante die 2. mit der 3. Spalte und die 2. Zeile mit der 3. Zeile. Multipliziert man ferner noch die 1. und 2. Zeile mit i, dann geht Δ''' über in:

$$\Delta''' = \frac{1}{i^2} \begin{vmatrix} (\alpha_1 - \alpha_3)\,i & i\,[\beta_1 - \beta_3 + (\beta_2 - \beta_4)\,i] & 0 & (\beta_2 - \beta_4)\,i \\ [(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_4 - \beta_2)\,i]\,i & (\delta_1 - \delta_3)\,i & (\beta_4 - \beta_2)\,i & 0 \\ (\alpha_1 - \alpha_2)\,i & i\,(\beta_1 - \beta_3) + \beta_4 - \beta_2 & \alpha_1 - \alpha_3 & \beta_1 - \beta_3 \\ i(\beta_1 - \beta_3) + \beta_2 - \beta_4 & (\delta_1 - \delta_3)\,i & \beta_1 - \beta_3 & \delta_1 - \delta_3 \end{vmatrix}$$

Endlich subtrahiert man in vorstehender Determinante die 1. Zeile von der 3. und die 2. von der 4. und findet:

$$\Delta'' = - \begin{vmatrix} (\alpha_1 - \alpha_3)\,i & i[\beta_1 - \beta_3 + (\beta_2 - \beta_4)\,i] & 0 & (\beta_2 - \beta_4)\,i \\ [\beta_1 - \beta_3 + (\beta_4 - \beta_2)\,i]\,i & (\delta_1 - \delta_3)\,i & (\beta_4 - \beta_2)\,i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 - \alpha_3 & \beta_1 - \beta_3 - (\beta_2 - \beta_4)\,i \\ 0 & 0 & \beta_1 - \beta_3 - (\beta_4 - \beta_2)\,i & \delta_1 - \delta_3 \end{vmatrix}$$

oder

$$\Delta'' = [(\alpha_1 - \alpha_3)\,(\delta_1 - \delta_3) - \{\beta_1 - \beta_3 + (\beta_4 - \beta_2)\,i\}\,\{\beta_1 - \beta_3 - (\beta_4 - \beta_2)\,i\}]\,[(\alpha_1 - \alpha_3)\,(\delta_1 - \delta_3) - \{\beta_1 - \beta_3 + (\beta_2 - \beta_4)\,i\}\,\{\beta_1 - \beta_3 - (\beta_2 - \beta_4)\,i\}]$$

Die Determinante Δ' läßt sich also — wie ersichtlich — in das Produkt von 4 Determinanten 2. Ordnung zerlegen. Betrachtet man die Form dieser Faktoren, so erkennt man, daß diese einem allgemeinen Bildungsgesetz folgen. Die α und δ enthaltenden Ausdrücke sind nämlich von der Form der Gleichung (8), wenn man dort nacheinder $k = 0, 1, 2, 3$ setzt. Danach ist mit $n = 4$

$$\varphi\,(\alpha, z_k) = \alpha_1 + 2\,\alpha_2 \cos k\,\frac{\pi}{2} + \alpha_3\,(-1)^k$$

Für $k = 0$ ist $\varphi\,(\alpha, z_0) = \alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3$
» $k = 1$ » $\varphi\,(\alpha, z_1) = \alpha_1 - \alpha_3$
» $k = 2$ » $\varphi\,(\alpha, z_2) = \alpha_1 - 2\,\alpha_2 + \alpha_3$
» $k = 3$ » $\varphi\,(\alpha, z_3) = \alpha_1 - \alpha_3$

} in Uebereinstimmung mit den oben gefundenen Faktoren der 4 Determinanten 2. Ordnung.

Analoges gilt für $\varphi\,(\delta, z_k)$. Die β enthaltenden Ausdrücke dagegen sind von der Form der Gleichung (4), wenn man dort α mit β vertauscht und wieder für k die Werte 0, 1, 2, 3 einführt. Danach ist

$$\varphi\,(\beta, z_k) = \beta_1 + \beta_2\left(\cos k\,\frac{\pi}{2} + i \sin k\,\frac{\pi}{2}\right) + \beta_3\left(\cos 2\,k\,\frac{\pi}{2} + i \sin 2\,k\,\frac{\pi}{2}\right) + \beta_4\left(\cos 3\,k\,\frac{\pi}{2} + i \sin 3\,k\,\frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad (24).$$

Für $k = 0$ ist $\varphi\,(\beta, z_0) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$
» $k = 1$ » $\varphi\,(\beta, z_1) = \beta_1 + \beta_2\,i - \beta_3 - \beta_4\,i$
» $k = 2$ » $\varphi\,(\beta, z_2) = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4$
» $k = 3$ » $\varphi\,(\beta, z_3) = \beta_1 - \beta_2\,i - \beta_3 + \beta_4\,i$

Bildet man weiter analog zu (24)

$$\varphi\,(\gamma, z_k) = \gamma_1 + \gamma_2\,z_k + \gamma_3\,z_k^2 + \gamma_4\,z_k^3,$$

und beachtet, daß nach (22)

$$\beta_1 = \gamma_1, \quad \beta_2 = \gamma_4, \quad \beta_3 = \gamma_3, \quad \beta_4 = \gamma_2$$

ist, so wird:

$$\varphi'\,(\beta, z_k) = \varphi\,(\gamma, z_k) = \beta_1 + \beta_4\left(\cos k\,\frac{\pi}{2} + i \sin k\,\frac{\pi}{2}\right) + \beta_3\left(\cos 2\,k\,\frac{\pi}{2} + i \sin 2\,k\,\frac{\pi}{2}\right) + \beta_2\left(\cos 3\,k\,\frac{\pi}{2} + i \sin 3\,k\,\frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad (25).$$

Setzt man in (25) wieder nacheinander $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, so findet man

$\varphi'\,(\beta, z_0) = \beta_1 + \beta_4 + \beta_3 + \beta_2$; $\quad \varphi'\,(\beta, z_2) = \beta_1 - \beta_4 + \beta_3 - \beta_2$;
$\varphi'\,(\beta, z_1) = \beta_1 + \beta_4\,i - \beta_3 - \beta_2\,i$; $\quad \varphi'\,(\beta, z_3) = \beta_1 - \beta_4\,i - \beta_3 + \beta_2\,i.$

Man erkennt sofort die Uebereinstimmung der $\varphi(\beta, z_k)$ und $\varphi'(\beta, z_k)$ mit den Faktoren der oben gefundenen 4 Determinanten 2. Ordnung. Trennt man nun in (24) und (25) die reellen von den imaginären Summanden, so wird

$$\varphi(\beta, z_k) = \psi(\beta, z_k) + i\,\psi'(\beta, z_k),$$

wobei

$$\psi(\beta, z_k) = \beta_1 + \beta_2 \cos k\frac{2\pi}{4} + \beta_3 \cos 2k\frac{2\pi}{4} + \beta_4 \cos 3k\frac{2\pi}{4}$$

$$i\,\psi'(\beta, z_k) = \left[\beta_2 \sin k\frac{2\pi}{4} + \beta_3 \sin 2k\frac{2\pi}{4} + \beta_4 \sin 3k\frac{2\pi}{4}\right] i$$

beziehungsweise

$$\varphi'(\beta, z_k) = \overline{\psi}(\beta\ z_k) + i\,\overline{\psi}'(\beta, z_k),$$

wobei

$$\overline{\psi}(\beta, z_k) = \beta_1 + \beta_4 \cos k\frac{2\pi}{4} + \beta_3 \cos 2k\frac{2\pi}{4} + \beta_2 \cos 3k\frac{2\pi}{4}$$

$$i\,\overline{\psi}'(\beta, z_k) = \left[\beta_4 \sin k\frac{2\pi}{4} + \beta_3 \sin 2k\frac{2\pi}{4} + \beta_2 \sin 3k\frac{2\pi}{4}\right] i.$$

Da aber

$$\cos k\frac{2\pi}{4} = \cos 3k\frac{2\pi}{4}, \quad \text{und} \quad \sin k\frac{2\pi}{4} = -\sin 3k\frac{2\pi}{4},$$

so wird

$$\psi(\beta, z_k) = \overline{\psi}(\beta, z_k) \quad \text{und} \quad \psi'(\beta, z_k) = -\overline{\psi}'(\beta, z_k),$$

so daß also

$$\varphi'(\beta, z_k) = \psi(\beta, z_k) - i\,\psi'(\beta, z_k).$$

Für das in den oben entwickelten 4 Determinanten der 2. Ordnung auftretende Produkt $\varphi(\beta, z_k)\,\varphi'(\beta, z_k)$ erhält man also:

$$\varphi(\beta, z_k)\,\varphi'(\beta, z_k) = \psi(\beta, z_k)^2 + \psi'(\beta, z_k)^2.$$

Setzt man nun allgemein:

$$F_k = \varphi(\alpha, z_k)\,\varphi(\delta, z_k) - [\psi(\beta, z_k)^2 + \psi'(\beta, z_k)^2] \quad \ldots \ldots \quad (26),$$

wobei $\varphi(\alpha, z_k)$ und $\varphi(\delta, z_k)$ durch (8) gegeben sind, so stellt dieser Ausdruck die allgemeine Form der 4 Determinanten 2. Ordnung dar, in welche die Determinante Δ' von der Ordnung 2.4 zerlegt worden ist. Deren Lösung lautet somit:

$$\Delta' = F_0\,F_1\,F_2\,F_3.$$

Dieses hier gefundene Ergebnis läßt sich nun auf die Determinante von der Ordnung $2n$ verallgemeinern, indem man diese auch stets in das Produkt von n Determinanten der 2. Ordnung zerlegen kann, die den vorstehend entwickelten Gesetzen folgen. Die allgemeine Lösung der Determinante Δ (23) lautet demnach

$$\Delta = F_0\,F_1\,F_2 \ldots . F_{(n-1)}.$$

Die Größen $\varphi(\alpha, z_k)$ und $\varphi(\delta, z_k)$ sind bei geradem n durch Gleichung (8), bei ungeradem durch (8a) gegeben, während für $\psi(\beta, z_k)$ und $\psi'(\beta, z_k)$ folgende allgemeinen Ausdrücke bestehen:

$$\psi(\beta, z_k) = \beta_1 + \sum_{r=1}^{r=n-1} \beta_{(r+1)} \cos r k\frac{2\pi}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27),$$

$$\psi'(\beta, z_k) = \sum_{r=1}^{r=n-1} (\beta_{(r+1)} \sin r k\frac{2\pi}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Infolge

$$\cos r\frac{2\pi}{n} = \cos(n-1)\,r\frac{2\pi}{n}, \qquad \sin r\frac{2\pi}{n} = -\sin(n-1)\,r\frac{2\pi}{n}$$

wird

$$\varphi(\alpha, z_1) = \varphi(\alpha, z_{n-1}),\ \varphi(\delta, z_1) = \varphi(\delta, z_{n-1}),\ \psi(\beta, z_1) = \psi(\beta, z_{n-1}),\ \psi'(\beta, z_1) = \psi'(\beta\ z_{n-1}),$$

demnach unter Beachtung von (26)

$$F_1 = F_{n-1}, \qquad F_2 = F_{n-2} \ldots .$$

$$F_{\frac{n}{2}-1} = F_{\frac{n}{2}+1}\ \text{(bei geradem } n\text{)}, \qquad F_{\frac{n-1}{2}} = F_{\frac{n-1}{2}}\ \text{(bei ungeradem } n\text{)}.$$

Somit wird endlich bei geradem n

$$\Delta = F_0\left(F_1\,F_2 \ldots . F_{\frac{n}{2}-1}\right)^2 F_{\frac{n}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29),$$

bei ungeradem n $$\Delta = F_0 \left(F_1 F_2 \ldots . F_{\frac{n-1}{2}}\right)^2 \qquad (30).$$

Nun sind offenbar die Unterdeterminanten A der Determinante (23), die zu den Elementen α der n α enthaltenden Zeilen mit gleichem Index gehören, einander gleich; dasselbe gilt für die zu den Elementen β und δ gehörigen Unterdeterminanten B und D. Differenziert man also die Determinante (23) partiell nach den Elementen α und δ, so erhält man

$$A_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1}; \quad D_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial \Delta}{\partial \delta_1}; \qquad A_r = \frac{1}{2n}\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha r}; \quad D_r = \frac{1}{2n}\frac{\partial \Delta}{\partial \delta r};$$

$(r = 2, 3, 4 \ldots \frac{n}{2}$ bei geradem n, $r = 2, 3, 4 \ldots \frac{n+1}{2}$ bei ungeradem n).

$$A_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{n}\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{\frac{n}{2}+1}}; \quad D_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{n}\frac{\partial \Delta}{\partial \delta_{\frac{n}{2}+1}} \text{ (bei geradem } n).$$

Mit Rücksicht auf Gl. (29) findet man also, wenn wieder ν für $\frac{n}{2}$ gesetzt wird:

$$A_1 = \frac{1}{n}\Delta\left\{\frac{\varphi(\delta, z_0)}{F_0} + 2\left[\frac{\varphi(\delta, z_1)}{F_1} + \frac{\varphi(\delta, z_2)}{F_2} + \ldots . + \frac{\varphi(\delta, z_{\nu-1})}{F_{\nu-1}}\right] + \frac{\varphi(\delta, z_\nu)}{F_\nu}\right\}.$$

Setzt man wieder:

$$\varphi(\delta, z_0) = d_0 = \delta_1 + 2(\delta_2 + \delta_3 + \ldots . \delta_\nu) + \delta_{\nu+1}$$

und

$$\varphi(\delta, z_\nu) = d_\nu = \delta_1 - 2\{\delta_2 - \delta_3 + \delta_4 - \ldots . - \delta_\nu(-1)^{\nu-1}\} + \delta_{\nu+1}(-1)^\nu,$$

so wird

$$\frac{A_1}{\Delta} = \frac{1}{n}\left\{\frac{d_0}{F_0} + \frac{d_\nu}{F_\nu} + 2\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\frac{\varphi(\delta, z_k)}{F_k}\right\},$$

worin

$$F_0 = a_0 d_0 - b_0^2; \quad b_0 = \sum_{r=1}^{r=n}\beta$$

und

$$F_\nu = a_\nu d_\nu - b^2_\nu; \qquad [b_\nu = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \ldots - \beta_n].$$

Weiter wird

$$A_r = \frac{1}{2n}\Delta\left\{\frac{2\varphi(\delta, z_0)}{F_0} + 2\left[\frac{2\cos(r-1)\frac{2\pi}{n}\varphi(\delta, z_1)}{F_1} + \frac{2\cos(r-1)\frac{4\pi}{n}\varphi(\delta, z_2)}{F_2}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \ldots . . + \frac{2\cos(r-1)\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)\varphi(\delta, z_{\nu-1})}{F_{\nu-1}}\right] + \frac{2(-1)^{r-1}\varphi(\delta, z_\nu)}{F_\nu}\right\}$$

oder

$$\frac{A_r}{\Delta} = \frac{1}{n}\left\{\frac{d_0}{F_0} + \frac{(-1)^{r-1}d_\nu}{F_\nu} + 2\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\frac{\cos(r-1)k\frac{2\pi}{n}\varphi(\delta, z_k)}{F_k}\right\} \qquad (32).$$

Endlich ist

$$A_{\nu+1} = \frac{1}{n}\Delta\left\{\frac{\varphi(\delta, z_0)}{F_0} + 2\left[-\frac{\varphi(\delta, z_1)}{F_1} + \frac{\varphi(\delta, z_2)}{F_2} - \ldots . + \frac{(-1)^{\nu-1}\varphi(\delta, z_{\nu-1})}{F_{\nu-1}}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^\nu\varphi(\delta, z_\nu)}{F_\nu}\right\}$$

oder

$$\frac{A_{\nu+1}}{\Delta} = \frac{1}{n}\left\{\frac{d_0}{F_0} + \frac{(-1)^\nu d_\nu}{F_\nu} + 2\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\frac{(-1)^k\varphi(\delta, z_k)}{F_k}\right\}.$$

Gl. (32) schließt also — wie ersichtlich — die Werte $\frac{A_1}{\Delta}$ und $\frac{A_{\nu+1}}{\Delta}$ mit ein. In analoger Weise ergibt sich:

$$\frac{D_r}{\Delta} = \frac{1}{n}\left\{\frac{a_0}{F_0} + \frac{(-1)^{r-1}a_\nu}{F_\nu} + 2\sum_{k=1}^{k=\nu-1}\frac{\cos(r-1)k\frac{2\pi}{n}\varphi(\alpha, z_k)}{F_k}\right\} \qquad (33).$$

Bei ungeradem n wird

$$\frac{A_r}{\Delta} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{d_0'}{F_0'} + 2 \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \frac{\cos (r-1) k \frac{2\pi}{n}}{F_k} \varphi (\delta, z_k) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

wobei

$$d_0' = \delta_1 + 2 \left(\delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_{\frac{n+1}{2}} \right), \qquad F_0' = a_0' d_0' - b_0^2.$$

$$\frac{D_r}{\Delta} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{a_0'}{F_0'} + 2 \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \frac{\cos (r-1) k \frac{2\pi}{n}}{F_k} \varphi (\alpha, z_k) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Differenziert man ferner Δ partiell nach β_r, so wird, da die Unterdeterminanten B aller Elemente β mit gleichem Index einander gleich sind,

$$B_r = \frac{1}{2n} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_r} \, (r = 1, 2, 3 \ldots n)$$

oder mit Rücksicht auf (29)

$$B_r = \frac{\Delta}{2n} \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial \beta_r} \frac{1}{F_0} + \frac{\partial F_1^2}{\partial \beta_r} \frac{1}{F_1^2} + \ldots . + \frac{\partial F_{\nu-1}^2}{\partial \beta_r} \frac{1}{F_{\nu-1}^2} + \frac{\partial F_\nu}{\partial \beta_r} \frac{1}{F_\nu} \right\}$$

$$= - \frac{\Delta}{n} \left\{ \frac{\psi (\beta, z_0)}{F_0} + 2 \left[\frac{\psi (\beta, z_1) \cos (r-1) \frac{2\pi}{n} + \psi' (\beta, z_1) \sin (r-1) \frac{2\pi}{n}}{F_1} \right. \right.$$

$$\left. + \ldots . + \frac{\psi (\beta, z_{\nu-1}) \cos (r-1)(\nu-1) \frac{2\pi}{n} + \psi' (\beta, z_{\nu-1}) \sin (r-1)(\nu-1) \frac{2\pi}{n}}{F_{\nu-1}} \right]$$

$$\left. + \frac{\psi (\beta, z_\nu) (-1)^{r-1}}{F_\nu} \right\}.$$

Daraus findet man endlich bei geradem n

$$\frac{B_r}{\Delta} = - \frac{1}{n} \left\{ \frac{b_0}{F_0} + \frac{b_\nu}{F_\nu} (-1)^{r-1} + 2 \sum_{k=1}^{k=\nu-1} \frac{\psi (\beta, z_k) \cos (r-1) k \frac{2\pi}{n} + \psi' (\beta, z_k) \sin (r-1) k \frac{2\pi}{n}}{F_k} \right\} \quad (36)$$

und bei ungeradem n wird entsprechend

$$\frac{B_r}{\Delta} = - \frac{1}{n} \left\{ \frac{b_0}{F_0'} + 2 \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \frac{\psi (\beta, z_k) \cos (r-1) k \frac{2\pi}{n} + \psi' (\beta, z_k) \sin (r-1) k \frac{2\pi}{n}}{F_k} \right\} \quad (37).$$

Mit Hilfe der so gefundenen Minoren lassen sich jetzt die Zählerdeterminanten und damit die statisch unbestimmten Größen des Gleichungssystems (21) sofort anschreiben. Man erhält bei geradem n:

[Vergl. die nebenstehenden Gleichungen (38) und (39).]

Die Quotienten $\frac{A}{\Delta}, \frac{B}{\Delta}, \frac{D}{\Delta}$ sind durch die Gleichungen (32) bis (37) gegeben, während für die Bestimmung der Größen d, d', α, β und δ das unter I. Gesagte sinngemäße Anwendung findet.

3. Biegungssteife Sparren in den Meridianebenen über 2 Stockwerke laufend. In dem aus Abb. 3 ersichtlichen zweistöckigen Raumfachwerk sollen die Sparren in ihrer Meridianebene biegungssteif ausgebildet werden. Die dadurch bedingten Knotenmomente Y über dem mittleren Ring werden als statisch unbestimmte Größen eingeführt. Abb. 3 zeigt den Belastungszustand $Y_n' = 1$. Dann gelten wieder die allgemeinen Elastizitätsgleichungen:

$$\begin{array}{l} Y_1' \delta_1{}_1' + Y_2' \delta_2{}_1' + \ldots . + Y_n' \delta_n{}_1' = e_1 \\ Y_1' \delta_1{}_2' + Y_2' \delta_2{}_2' + \ldots . + Y_n' \delta_n{}_2' = e_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ Y_1' \delta_1{}_n' + Y_2' \delta_2{}_n' + \ldots . + Y_n' \delta_n{}_n' = e_n \end{array}$$

(Fortsetzung des Textes auf Seite 356.)

$$
\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_1 A_1 + (d_2 + d_n)A_2 + (d_3 + d_{n-1})A_3 + \ldots \\
&\qquad + d_{\frac{n}{2}+1} A_{\frac{n}{2}+1} + d_1' B_1 + d_2' B_2 + \ldots + d_n' B_n \Big\} \\
X_2 &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_2 A_1 + (d_3 + d_1)A_2 + (d_4 + d_n)A_3 + \ldots \\
&\qquad + d_{\frac{n}{2}+2} A_{\frac{n}{2}+1} + d_2' B_1 + d_3' B_2 + \ldots + d_1' B_n \Big\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_n &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_n A_1 + (d_1 + d_{n-1})A_2 + (d_2 + d_{n-2})A_3 + \ldots \\
&\qquad + d_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}+1} + d_n' B_1 + d_1' B_2 + \ldots + d_{n-1}' B_n \Big\} \\
X_1' &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_1 B_1 + d_n B_2 + d_{n-1} B_3 + \ldots + d_2 B_n + d_1' D_1 \\
&\qquad + (d_2' + d_n')D_2 + (d_3' + d_{n-1}')D_3 + \ldots + d_{\frac{n}{2}+1}' D_{\frac{n}{2}+1} \Big\} \\
X_2' &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_2 B_1 + d_1 B_2 + d_n B_3 + \ldots + d_3 B_n + d_2' D_1 \\
&\qquad + (d_3' + d_1')D_2 + (d_4' + d_n')D_3 + \ldots + d_{\frac{n}{2}+2}' D_{\frac{n}{2}+1} \Big\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_n' &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_n B_1 + d_{n-1} B_2 + d_{n-2} B_3 + \ldots + d_1 B_n + d_n' D_1 \\
&\qquad + (d_1' + d_{n-1}')D_2 + (d_2' + d_{n-2}')D_3 + \ldots + d_{\frac{n}{2}}' D_{\frac{n}{2}+1} \Big\}
\end{aligned}\right\} \tag{38}
$$

und bei ungeradem n:

$$
\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_1 A_1 + (d_2 + d_n)A_2 + (d_3 + d_{n-1})A_3 + \ldots \\
&\qquad + \left(d_{\frac{n+1}{2}} + d_{\frac{n+3}{2}}\right) A_{\frac{n+1}{2}} + d_1' B_1 + d_2' B_2 + \ldots + d_n' B_n \Big\} \\
X_2 &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_2 A_1 + (d_3 + d_1)A_2 + (d_4 + d_n)A_3 + \ldots \\
&\qquad + \left(d_{\frac{n+3}{2}} + d_{\frac{n+5}{2}}\right) A_{\frac{n+1}{2}} + d_2' B_1 + d_3' B_2 + \ldots + d_1' B_n \Big\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_n &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_n A_1 + (d_1 + d_{n-1})A_2 + (d_2 + d_{n-2})A_3 + \ldots \\
&\qquad + \left(d_{\frac{n-1}{2}} + d_{\frac{n+1}{2}}\right) A_{\frac{n+1}{2}} + d_n' B_1 + d_1' B_2 + \ldots + d_{n-1}' B_n \Big\} \\
X_1' &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_1 B_1 + d_n B_2 + \ldots + d_2 B_n + d_1' D_1 + (d_2' + d_n')D_2 \\
&\qquad + (d_3' + d_{n-1}')D_3 + \ldots + \left(d_{\frac{n+1}{2}}' + d_{\frac{n+3}{2}}'\right) D_{\frac{n+1}{2}} \Big\} \\
X_2' &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_2 B_1 + d_1 B_2 + \ldots + d_3 B_n + d_2' D_1 + (d_3' + d_1')D_2 \\
&\qquad + (d_4' + d_n')D_3 + \ldots + \left(d_{\frac{n+3}{2}}' + d_{\frac{n+5}{2}}'\right) D_{\frac{n+1}{2}} \Big\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_n' &= \frac{1}{\varDelta}\Big\{ d_n B_1 + d_{n-1} B_2 + \ldots + d_1 B_n + d_n' D_1 + (d_1' + d_{n-1}')D_2 \\
&\qquad + (d_2' + d_{n-2}')D_3 + \ldots + \left(d_{\frac{n-1}{2}}' + d_{\frac{n+1}{2}}'\right) D_{\frac{n+1}{2}} \Big\}
\end{aligned}\right\} \tag{39}
$$

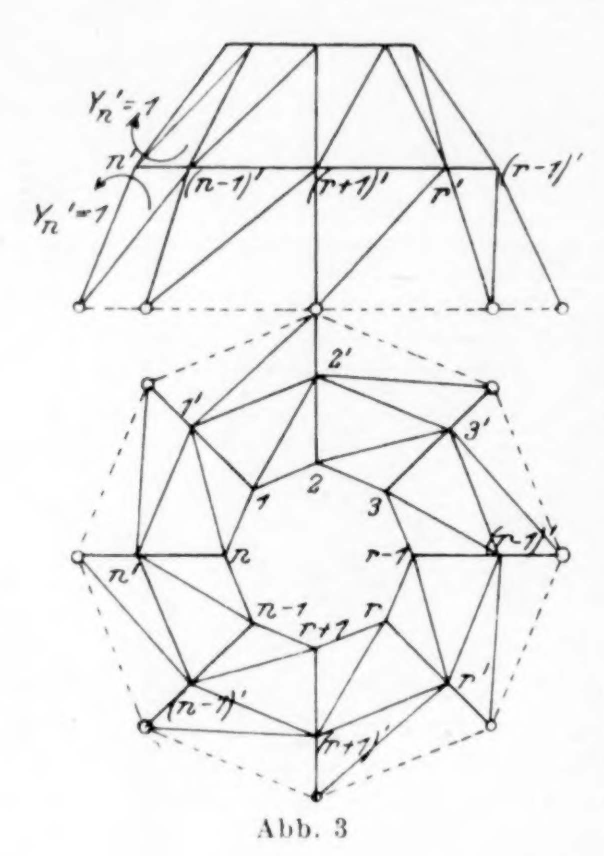


Abb. 3

Infolge der zyklischen Symmetrie ist aber wie ersichtlich:

$$\delta_{1'1'} = \delta_{2'2'} = \ldots = d_{r'r'} = \varepsilon_1$$
$$\delta_{2'1'} = \delta_{3'2'} = \ldots = \delta_{r'(r-1)'} = \varepsilon_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Nennerdeterminante des vorstehenden Gleichungssystems ist wieder eine zyklische Determinante n-ter Ordnung, so daß der Rechnungsgang zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größen Y genau denselben Verlauf nimmt wie unter **1**. Die Ausdrücke für die Momente Y sind also durch die Gleichungen (17) und (18) gegeben, wenn man dort die Absolutglieder c durch e und die Elemente α der Unterdeterminanten U durch ε ersetzt. Für diese finden unter Beachtung des oben angegebenen Belastungszustandes die Gleichungen (19) und (20) sinngemäße Anwendung. Werden die Sparren bei einem 3-stöckigen Fachwerk über alle 3 Stockwerke in ihrer Meridianebene biegungssteif durchgeführt, so liegen ganz analoge Verhältnisse vor wie im Falle zweier biegungssteifer Ringe. Die unbekannten Momente Y_r und Y_r' können dann nach den unter **2**. entwickelten Gesetzen berechnet werden.

4. Ein biegungssteifer Schlußring und über 2 Stockwerke laufende biegungssteife Sparren. Dieser Zustand stellt eine Kombination der oben behandelten Fälle **1** und **3**. dar. Führt man wieder die entsprechenden Momente im Schlußring und in den Sparren als statisch unbestimmte Größen ein, so gelangt man zu Elastizitätsgleichungen von der Form (21), wenn man dort die X_r' durch Y_r' ersetzt. Die Unbekannten können somit in der dort besprochenen Weise berechnet werden. Die Ermittlung der Werte d und d', sowie der Verschiebungsgrößen α, β, γ erfolgt in der früher angedeuteten Weise unter Beachtung der jeweils maßgebenden Belastungszustände.

Mit Hilfe des hier entwickelten Verfahrens ist also die rechnerische Behandlung derartig versteifter Raumfachwerke ohne Schwierigkeiten möglich. Der Rechnungsgang wird nachstehend an einem einfachen Beispiel durchgeführt.

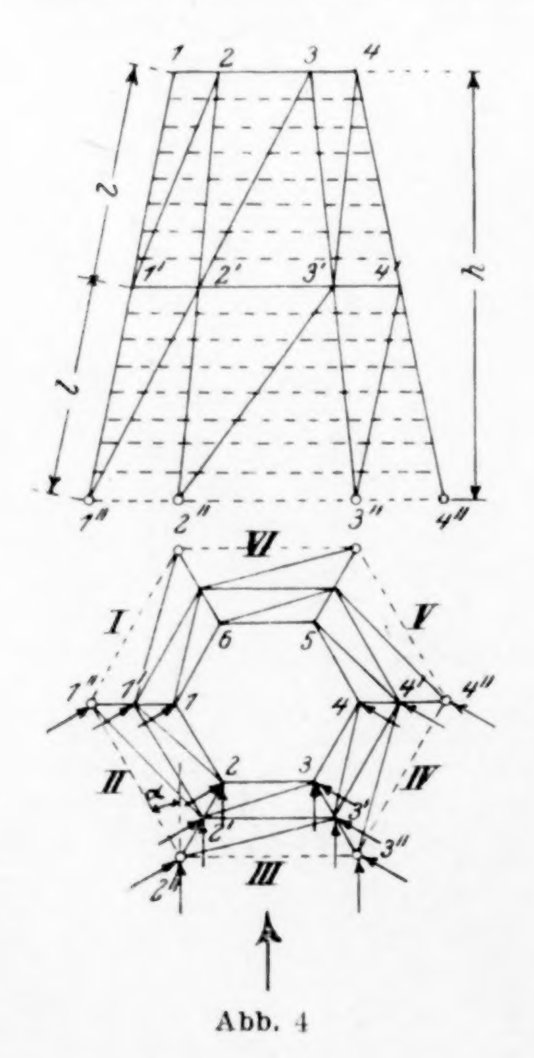


Abb. 4

II. Durchführung eines Beispieles.

Es sollen die Stabspannkräfte des in Abb. 4 skizzierten vollkommen verschalten Turmgerüstes unter dem Einfluß einer in der Pfeilrichtung wirkenden Windbelastung von $W = 150$ kg/qm senkrecht getroffener Fläche berechnet werden, und zwar

a) ohne Versteifung,
b) mit biegungssteifem Schlußring,
c) mit biegungssteifem Schlußring und in den Meridianebenen biegungssteifen Sparren.

Die Systemabmessungen seien wie folgt gegeben:

Sparrenlänge . . . . $l = 5$ m,
obere Ringseite . . . . . . $s_0 = 2$ »,
mittlere » . . . . . . $s_m = 3$ ».

Die Schalung soll auf eng nebeneinander liegenden Querhölzern befestigt werden, die ihrerseits auf den Sparren gelagert sind. Sämtliche auf das Fachwerk wirkenden Windlasten werden nun auf die Knotenpunkte verteilt. Der geringe Neigungswinkel der Mantelfläche gegen die Vertikale soll bei der Lastermittlung vernachlässigt, der Winddruck auf die vordere Fläche also in voller Stärke eingeführt werden. Der Neigungswinkel der an diese anschließenden Flächen gegen die erste ist demnach gegeben durch $\sin \alpha = 1/2$

1. Unversteiftes System. Die auf Scheibe III (s. Abb. 4) wirkenden Knotenlasten ergeben sich wie folgt:

$$\overset{III}{P_2'} = \overset{III}{P_3'} = 1{,}5\,\frac{h}{2}\,W = 0{,}75\,h\,W.$$

Setzt man $h \sim 10$, so wird:

$$\overset{III}{P_2'} = \overset{III}{P_3'} = 7{,}5 \cdot 150 = 1125 \text{ kg} = P,$$

$$\overset{III}{P_2} = \overset{III}{P_3} = \frac{1 + 1{,}25}{2}\,\frac{h}{4}\,W = {}^3/_8\,P, \qquad \overset{III}{P_2''} = \overset{III}{P_3''} = \frac{1{,}75 + 2}{2}\,\frac{h}{4}\,W = {}^5/_8\,P.$$

Durch Multiplikation mit $\sin^2 \alpha = {}^1/_4$ erhält man aus vorstehenden Lasten die auf die Scheiben II und IV wirkenden Windkomponenten.

$$\overset{II}{P_1'} = \overset{II}{P_2'} = \overset{IV}{P_3'} = \overset{IV}{P_4'} = \frac{P}{4},$$

$$\overset{II}{P_1} = \overset{II}{P_2} = \overset{IV}{P_3} = \overset{IV}{P_4} = {}^3/_{32}\,P, \qquad \overset{II}{P_1''} = \overset{II}{P_2''} = \overset{IV}{P_3''} = \overset{IV}{P_4''} = {}^5/_{32}\,P.$$

Um nun die Spannkräfte in den Fachwerkstäben aus den vorstehend ermittelten Windlasten berechnen zu können, werden alle am Fachwerk angreifenden Kräfte in den Ringebenen nach je 2 in einem Knoten zusammentreffenden Ringseiten zerlegt. Man erhält dann mit den Bezeichnungen der Abb. 5:

$$\overset{I}{K_1'} = \overset{V}{K_4'} = \frac{P}{4 \cos \alpha} = 0{,}288\,P; \quad \overset{II}{K_2'} = \overset{IV}{K_3'} = \frac{P}{\cos \alpha} + \frac{P}{4} \operatorname{tg} \alpha = 1{,}296\,P,$$

$$\overset{II}{K_1'} = \overset{IV}{K_4'} = \frac{P}{4} \operatorname{tg} \alpha = 0{,}144\,P; \quad \overset{III}{K_2'} = \overset{III}{K_3'} = P \operatorname{tg} \alpha + \frac{P}{4 \cos \alpha} = 0{,}864\,P.$$

Die entsprechenden Lastkomponenten am oberen Ring erhält man durch Multiplikation der vorstehenden Werte mit ${}^3/_8$, während die an den Fußknotenpunkten angreifenden Windkräfte direkt in die Fundamente gehen, für die Untersuchung des Stabwerkes also außer acht gelassen werden können. Somit ergibt sich das in Abb. 5 dargestellte Belastungsschema. Nun können die Scheiben I—V als ebene Träger untersucht und ihre Spannkräfte getrennt berechnet werden (Abb. 6 a—e). Die so gefundenen Werte aus Windbelastung am unversteiften System wurden in nachstehende Tabelle eingetragen. Bei der Spannungsermittlung ist noch darauf zu achten, daß die Sparren durch die auf ihnen lagernde Holzverschalung Biegemomente erhalten, welche einen entsprechenden Beitrag zur Gesamtspannung liefern. (Die Zahlenwerte sind durch Rechenschieberablesung gefunden.)

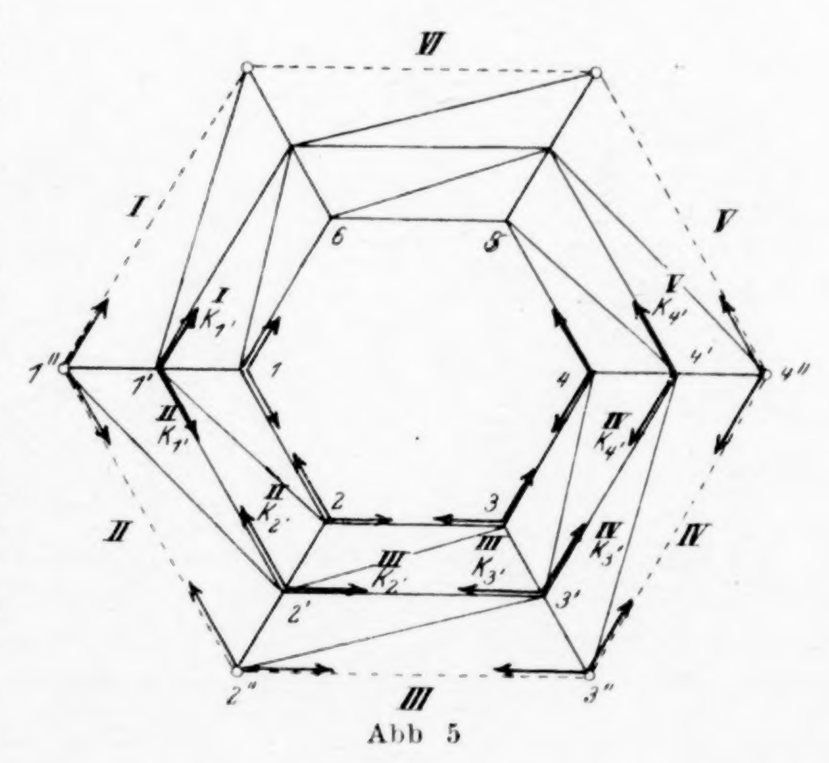
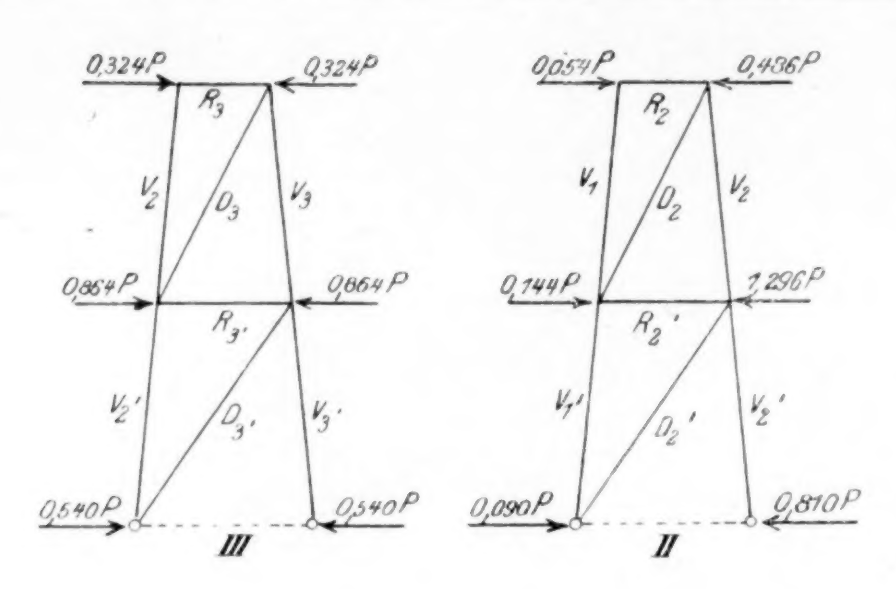


Abb. 5

Tafel der Spannkräfte aus Wind

Stab	S_w kg	Stab	S_w kg	Stab	S_w kg	Stab	S_w kg	Stab	S_w kg	Stab	S_w kg
R_1	± 0	R_1'	+ 81	D_1	− 225	D_1'	− 618	V_1	+ 203	V_1'	− 101
R_2	− 61	R_2'	+ 162	D_2	− 899	D_2'	− 2471	V_2	+ 810	V_2'	+ 2835
R_3	− 365	R_3'	− 973	D_3	± 0	D_3'	± 0	V_3	± 0	V_3'	+ 810
R_4	− 547	R_4'	− 1782	D_4	+ 899	D_4'	+ 2471	V_4	− 810	V_4'	− 2633
R_5	− 122	R_5'	− 405	D_5	+ 2[illegible]5	D_5'	+ 618	V_5	− 203	V_5'	− 709
R_6	± 0	R_6'	± 0	D_6	± 0	D_6'	± 0	V_6	± 0	V_6'	− 203



2. Biegungssteifer Schlußring. Die Ermittlung der Spannkräfte S_0 infolge der äußeren Belastung am statisch bestimmten Hauptsystem ist durch die unter **1** gegebenen Erklärungen erledigt; die S_0-Werte sind demnach als bekannt anzunehmen. Zur Betrachtung des virtuellen Zustandes $X_r = 1$ und Ermittlung der daraus resultierenden Spannkräfte S_r zer-

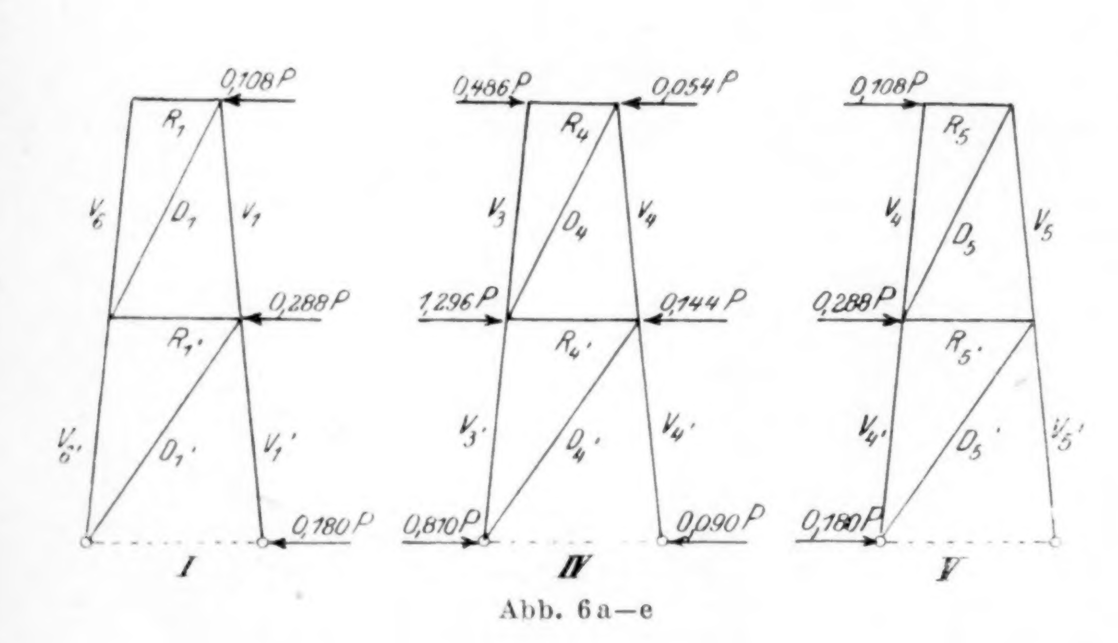


Abb. 6a—e

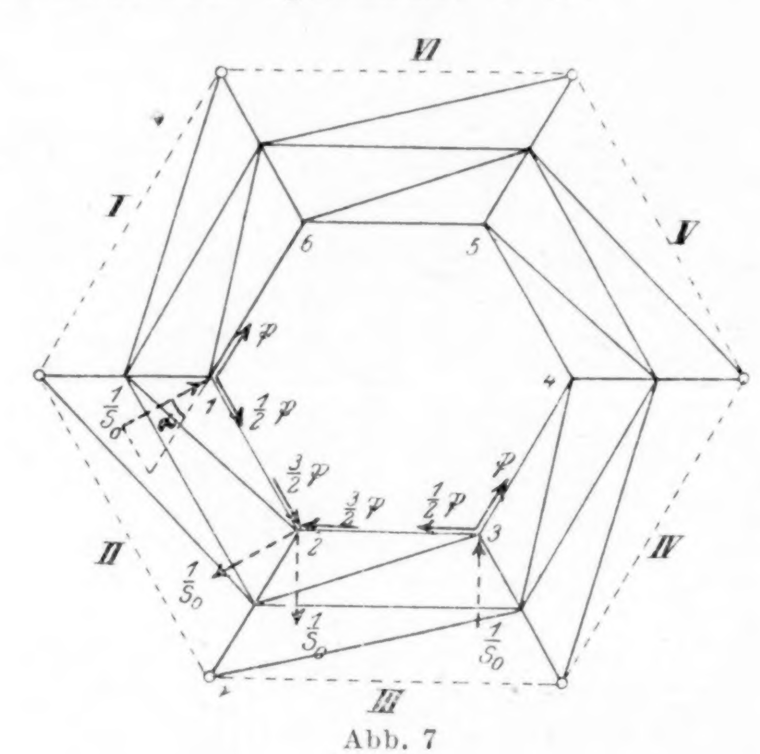


Abb. 7

lege man die durch die Momente $X_r = 1$ auf das Fachwerk ausgeübten Kräfte $\frac{1}{s}$ wie unter **1** nach 2 Ringseiten und erhält dann z. B. für $r = 2$ die folgenden Belastungskomponenten (Abb. 7):

$$\overset{I}{P_1} = \overset{IV}{P_3} = \frac{1}{s\cos\alpha} = \mathfrak{P}; \quad \overset{II}{P_1} = \overset{III}{P_3} = \frac{1}{s}\operatorname{tg}\alpha = \mathfrak{P}\sin\alpha = {}^1/_2\,\mathfrak{P};$$

$$\overset{II}{P_2} = \overset{III}{P_2} = \frac{1}{s\cos\alpha} + \frac{1}{s}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{s\cos\alpha}(1+\sin\alpha) = {}^3/_2\,\mathfrak{P}.$$

Faßt man wieder die Scheiben I—IV (Abb. 8a—d) als selbständige ebene Träger auf, so können die virtuellen Spannkräfte S_2 in einfacher Weise bestimmt werden. Sie sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt. Für die übrigen Zustände $X_r = 1$ ergeben sich die entsprechenden S_r Werte durch zyklische Vertauschung der Zeiger.

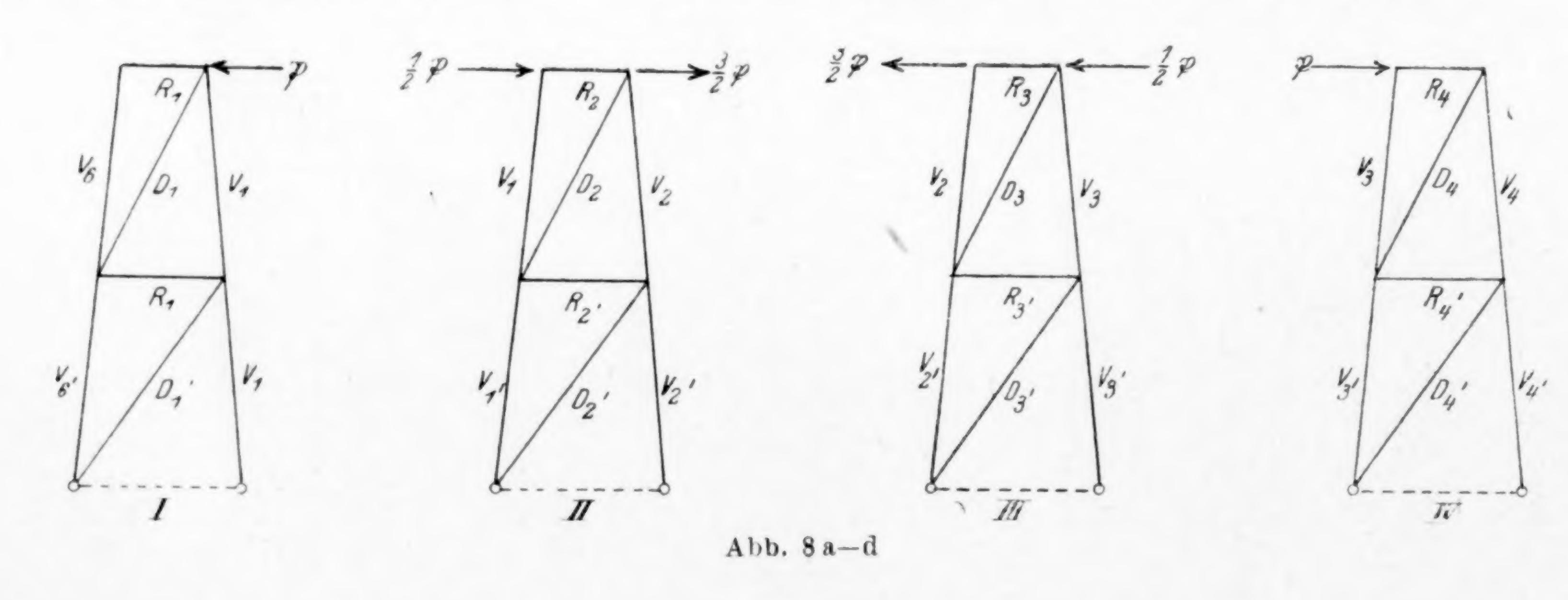


Abb. 8a—d

Spannkräfte infolge $X_2 = 1$.

Stab	S_2	Stab	S_2	Stab	S_2	Stab	S_2	Stab	S_2	Stab	S_2
R_1	$\pm 0{,}000$	R_1'	$+ 0{,}667\,\mathfrak{P}$	D_1	$- 1{,}850\,\mathfrak{P}$	D_1'	$- 1{,}020\,\mathfrak{P}$	V_1	$+ 1{,}667\,\mathfrak{P}$	V_1'	$+ 5{,}833\,\mathfrak{P}$
R_2	$- 0{,}500\,\mathfrak{P}$	R_2'	$- 1{,}333\,\mathfrak{P}$	D_2	$+ 3{,}700\,\mathfrak{P}$	D_2'	$+ 2{,}040\,\mathfrak{P}$	V_2	$- 3{,}333\,\mathfrak{P}$	V_2'	$- 8{,}333\,\mathfrak{P}$
R_3	$+ 1{,}500\,\mathfrak{P}$	R_3'	$+ 1{,}333\,\mathfrak{P}$	D_3	$- 3{,}700\,\mathfrak{P}$	D_3'	$- 2{,}040\,\mathfrak{P}$	V_3	$+ 3{,}333\,\mathfrak{P}$	V_3'	$+ 6{,}667\,\mathfrak{P}$
R_4	$- 1{,}000\,\mathfrak{P}$	R_4'	$- 0{,}667\,\mathfrak{P}$	D_4	$+ 1{,}850\,\mathfrak{P}$	D_4'	$+ 1{,}020\,\mathfrak{P}$	V_4	$- 1{,}667\,\mathfrak{P}$	V_4'	$- 2{,}500\,\mathfrak{P}$
R_5	$\pm 0{,}000$	R_5'	$\pm 0{,}000$	D_5	$\pm 0{,}000$	D_5'	$\pm 0{,}000$	V_5	$\pm 0{,}000$	V_5'	$\pm 0{,}000$
R_6	$\pm 0{,}000$	R_6'	$\pm 0{,}000$	D_6	$\pm 0{,}000$	D_6'	$\pm 0{,}000$	V_6	$\pm 0{,}000$	V_6'	$- 1{,}667\,\mathfrak{P}$

Mit Hilfe dieser Spannkräfte lassen sich nun nach Gl. (20) die Ausdrücke

$$EF_c\alpha_1 = \Sigma S_r^2 s\,\frac{F_c}{F} + \frac{F_c}{J}\int M_r^2\,dx, \qquad EF_c\alpha_2 = \Sigma S_r S_{r-1} s\,\frac{F_c}{F} + \frac{F_c}{J}\int M_r M_{r-1}\,dx$$

$$EF_c\alpha_3 = \Sigma S_r S_{r-2} s\,\frac{F_c}{F}, \qquad EF_c\alpha_4 = \Sigma S_r S_{r-3} s\,\frac{F_c}{F}$$

berechnen, falls die Verhältniszahlen $\frac{F_c}{F}$ und $\frac{F_c}{J}$ bekannt sind. Diese sollen wie folgt in die weitere Rechnung eingeführt werden:

Für die oberen Ringstäbe $\frac{F_c}{F_R} = 3{,}7$ Für die oberen Schrägstäbe $\frac{F_c}{F_D} = 3{,}7$

» » mittleren » $\frac{F_c}{F_R'} = 4{,}7$ » » unteren » $\frac{F_c}{F_D'} = 2{,}2$

Für die oberen Sparren $\frac{F_c}{F_V} = 1{,}25$

» » unteren » $\frac{F_c}{F_V'} = 1{,}00$,

endlich für die oberen Ringstäbe $\frac{F_c}{J} = 0{,}17$.

Nach Ausführung der Multiplikation, Integration und Summation findet man nach Einsetzung der Zahlenwerte:

$$EF_c\alpha_1 = +\,28{,}961, \quad EF_c\alpha_2 = +\,0{,}561, \quad EF_c\alpha_3 = +\,2{,}745, \quad EF_c\alpha_4 = -\,1{,}575.$$

In ähnlicher Weise können nach Gl. (19) die Ausdrücke

$$EF_c c_1 = -\Sigma S_0 S_1 s\,\frac{F_c}{F}, \quad EF_c c_2 = -\Sigma S_0 S_2 s\,\frac{F_c}{F}\;\ldots, \quad EF_c c_6 = -\Sigma S_0 S_6 s\,\frac{F_c}{F}$$

mit Hilfe der Spannkräfte S_0 und S_r berechnet werden. Sie ergeben nach Einführung der Zahlenwerte:

$$EF_c c_1 = -\,124\,475, \quad EF_c c_2 = +\,69\,440, \quad EF_c c_3 = +\,57\,753,$$
$$EF_c c_4 = -\,127\,180, \quad EF_c c_5 = +\,72\,833, \quad EF_c c_6 = +\,51\,760.$$

Mit Anwendung auf das vorstehende Beispiel liefert Gl. (13):

$$\frac{U_1}{D} = {}^1/_6\left\{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_3} + 2\sum_{k=1}^{k=2}\frac{1}{\varphi(\alpha, z_k)}\right\},$$

worin $a_0 = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4$, $\quad a_3 = \alpha_1 - 2(\alpha_2 - \alpha_3) - \alpha_4$
und nach Gl. (8)

$$\varphi(\alpha, z_k) = \alpha_1 + 2\sum_{r=1}^{r=2}\alpha_{(r+1)}\cos rk\,\frac{\pi}{3} + \alpha_4(-1)^k$$

ist. Nach Einführung der oben gefundenen Werte wird:

$$a_0 EF_c = +\,34{,}0; \quad a_3 EF_c = +\,34{,}9$$

$$EF_c\varphi(\alpha, z_1) = EF_c\left[\alpha_1 + 2\left(\alpha_2\cos\frac{\pi}{3} + \alpha_3\cos\frac{2\pi}{3}\right) - \alpha_4\right] = +\,28{,}4$$

$$EF_c\varphi(\alpha, z_2) = EF_c\left[\alpha_1 + 2\left(\alpha_2\cos\frac{2\pi}{3} + \alpha_3\cos\frac{4\pi}{3}\right) - \alpha_4\right] = +\,24{,}1.$$

Somit ergibt sich:

$$\frac{U_1}{DEF_c} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{34} + \frac{1}{34{,}9} + 2\left(\frac{1}{28{,}4} + \frac{1}{24{,}1}\right)\right\} = +\,0{,}03525$$

und entsprechend nach Gl. (14):

$$\frac{U_2}{DEF_c} = \frac{1}{6\,EF_c}\left\{\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_3} + 2\sum_{k=1}^{k=2}\frac{\cos k\frac{\pi}{3}}{\varphi\,(\alpha, z_k)}\right\} = -\,0{,}00093$$

$$\frac{U_3}{DEF_c} = \frac{1}{6\,EF_c}\left\{\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_3} + 2\sum_{k=1}^{k=2}\frac{\cos 2\,k\frac{\pi}{3}}{\varphi\,(\alpha, z_k)}\right\} = -\,0{,}00310$$

$$\frac{U_4}{DEF_c} = \frac{1}{6\,EF_c}\left\{\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_3} + 2\sum_{k=1}^{k=2}\frac{(-1)^k}{\varphi\,(\alpha, z_k)}\right\} = +\,0{,}00222.$$

Nun setzt man die vorstehend gefundenen Werte in Gl. (17) ein und erhält die statisch unbestimmten Knotenmomente:

$X_1 = -\,5189$ cmkg; $X_2 = +\,2905$ cmkg; $X_3 = +\,2364$ cmkg;
$X_4 = -\,5257$ » ; $X_5 = +\,2998$ » ; $X_6 = +\,2180$ » .

Zur Ermittlung der tatsächlich auftretenden Spannkräfte im Fachwerk schreiben wir jetzt die allgemeine Beziehung an:

$$S = S_0 + \sum_{r=1}^{r=6} S_r X_r,$$

in der alle Größen bekannt sind. Diese liefert die in nachstehende Tabelle eingetragenen Spannkräfte.

Wirkliche Spannkräfte S_w.

Stab	S_w kg	Stab	S_w kg	Stab	S_w kg	Stab	S_w kg	Stab	S_w kg	Stab	S_w kg
R_1	+ 17	R_1'	+ 137	D_1	− 382	D_1'	− 704	V_1	+ 344	V_1'	+ 264
R_2	− 127	R_2'	+ 100	D_2	− 728	D_2'	− 2377	V_2	+ 656	V_2'	+ 2594
R_3	− 317	R_3'	− 969	D_3	− 11	D_3'	− 6	V_3	+ 10	V_3'	+ 677
R_4	− 528	R_4'	− 1723	D_4	+ 735	D_4'	+ 2381	V_4	− 662	V_4'	− 2251
R_5	− 190	R_5'	− 471	D_5	+ 403	D_5'	+ 716	V_5	− 364	V_5'	− 960
R_6	+ 50	R_6'	+ 7	D_6	− 18	D_6'	− 1	V_6	+ 16	V_6'	− 320

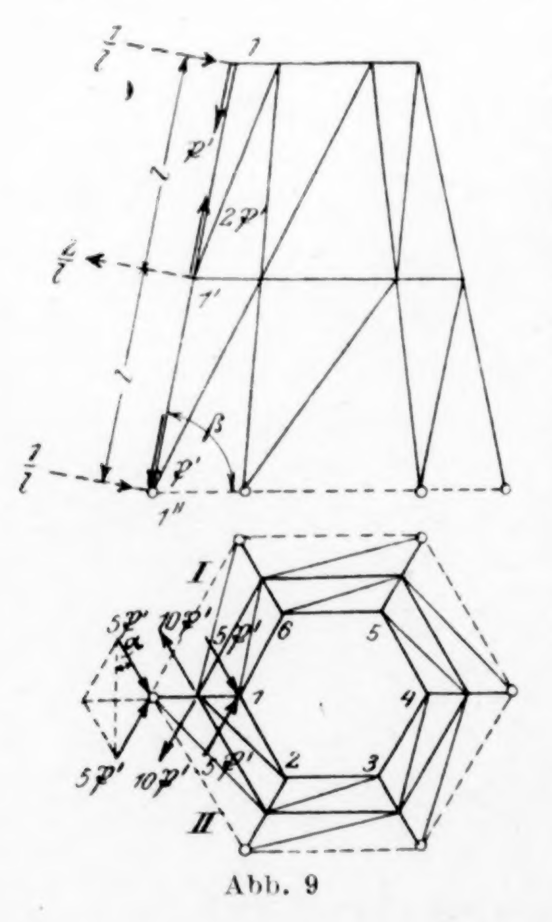


Abb. 9

3. Biegungssteifer Schlußring und biegungssteife Sparren. Die Ermittlung der Spannkräfte S_0 infolge der äußeren Belastung und S_r infolge $X_r = 1$ ist durch die Erläuterungen unter 1. und 2. erledigt. Zur Bestimmung der Spannkräfte S_r' infolge des virtuellen Belastungszustandes $Y_r' = 1$ (vergl. unter I. 3.) zerlege man die durch die Momente $Y_r' = 1$ auf das Fachwerk ausgeübten Kräfte $\frac{1}{l}$ in der Meridianebene nach der Sparrenrichtung und nach der Horizontalen und letztere wieder nach den beiden anschließenden Ringstäben. (In Abb. 9 sind die Sparrenkomponenten im Aufriß, die Ringstabkomponenten im Grundriß eingetragen.)

Man erhält dann für die in der Sparrenrichtung wirkenden Lasten, wenn z. B. $r = 1$ ist:

am Knoten 1: $\frac{1}{l\,\mathrm{tg}\,\beta} = \mathfrak{P}'$, am Knoten 1': $2\,\mathfrak{P}'$,

am Knoten 1'': $\mathfrak{P}'$,

wobei $\mathrm{tg}\,\beta = 4{,}9$ aus den Systemabmessungen entnommen wird. Die Komponenten in Richtung der Ringstäbe sind:

$$\overset{\mathrm{I}}{P_1} = \frac{1}{l\sin\beta}\,\frac{1}{2\sin\alpha}; \quad \overset{\mathrm{I}}{P_1'} = 2\,\overset{\mathrm{I}}{P_1};$$

mit $\sin\beta = 0{,}98$ und $\sin\alpha = {}^1/_2$ wird:

$$\overset{\mathrm{I}}{P_1} = \overset{\mathrm{II}}{P_1} = \overset{\mathrm{I}}{P_1''} = \overset{\mathrm{II}}{P_1''} = \frac{1}{l\;0{,}98} = 5\,\mathfrak{P}', \qquad \overset{\mathrm{I}}{P_1'} = \overset{\mathrm{II}}{P_1'} = 10\,\mathfrak{P}'.$$

Nun findet man die Spannkräfte S_1' in einfacher Weise durch Belastung der Scheiben I und II (Abb. 10a—b) mit den oben angegebenen äußeren Kräften. Die daraus ermittelten virtuellen Stabspannkräfte sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt. Durch zyklische Vertauschung der Zeiger sind damit auch die entsprechenden S_r'-Werte der übrigen Zustände $Y_r' = 1$ bekannt.

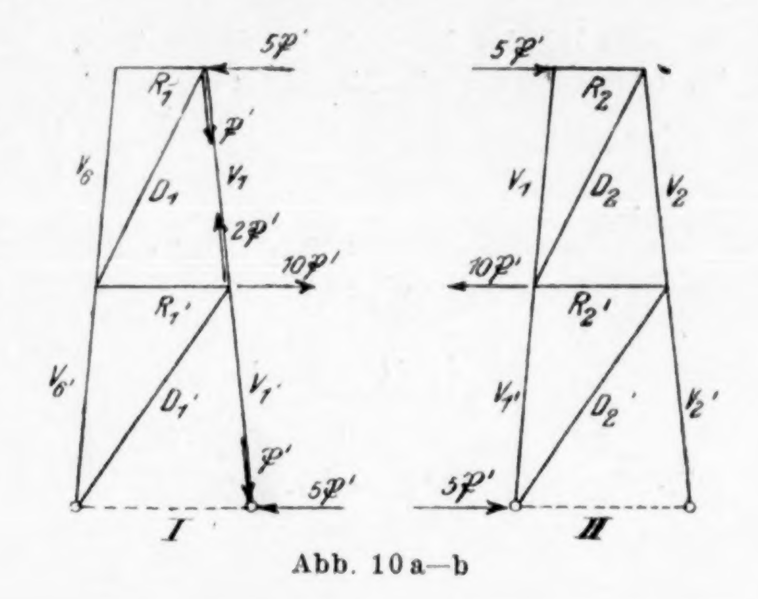


Abb. 10a—b

Tafel der Spannkräfte S_1'.

Stab	S_1'	Stab	S_1'	Stab	S_1'	Stab	S_1'	Stab	S_1'	Stab	S_1'
R_1	± 0,0	R_1'	+ 3,333 𝔓'	D_1	− 9,25 𝔓'	D_1'	+ 10,10 𝔓'	V_1	+ 7,333 𝔓'	V_1'	+ 9,333 𝔓'
R_2	− 5,0 𝔓'	R_2'	+ 6,667 𝔓'	D_2	+ 9,25 𝔓'	D_2'	− 10,10 𝔓'	V_2	− 8,333 𝔓'	V_2'	0
R_3	0	R_3'	0	D_3	0	D_3'	0	V_3	0	V_3'	0
R_4	0	R_4'	0	D_4	0	D_4'	0	V_4	0	V_4'	0
R_5	0	R_5'	0	D_5	0	D_5'	0	V_5	0	V_5'	0
R_6	0	R_6'	0	D_6	0	D_6'	0	V_6	0	V_6'	− 8,333 𝔓'

Mit Hilfe der vorstehenden Tabelle lassen sich nun die Ausdrücke:

$$EF_c\delta_1 = \Sigma\, S_r'^2 s\, \frac{F_c}{F} + \int \frac{F_c}{J}\, M_r'^2\, dx;$$

$$EF_c\delta_2 = \Sigma\, S_r' S_{(r-1)}' s\, \frac{F_c}{F}, \qquad EF_c\delta_3 = \Sigma\, S_r' S_{(r-2)}' s\, \frac{F_c}{F}, \qquad EF_c\delta_4 = \Sigma\, S_r' S_{(r-3)}' s\, \frac{F_c}{F}$$

und unter Berücksichtigung der Tabelle für die S_r-Werte auf S. 359 die Ausdrücke

$$EF_c\beta_1 = \Sigma\, S_r' S_r\, s\, \frac{F_c}{F}, \qquad EF_c\beta_2 = \Sigma\, S_r' S_{(r-1)}\, s\, \frac{F_c}{F}\; \ldots, \qquad EF_c\beta_6 = \Sigma\, S_r' S_{(r-5)}\, s\, \frac{F_c}{F}$$

berechnen. Dabei ist für den oberen Sparrenteil zu setzen $\frac{F_c}{J_0} = 0{,}093$, für den unteren $\frac{F_c}{J_u} = 0{,}06$. Nach Ausführung der Zahlenoperationen erhält man:

$$EF_c\delta_1 = +\,25{,}645, \qquad EF_c\delta_2 = -\,0{,}0595, \qquad EF_c\delta_3 = 0, \qquad EF_c\delta_4 = 0$$

und ferner:

$$EF_c\beta_1 = -\,0{,}426; \quad EF_c\beta_2 = +\,0{,}372; \quad EF_c\beta_3 = -\,0{,}169;$$
$$EF_c\beta_4 = +\,0{,}0245; \quad EF_c\beta_5 = -\,0{,}0746; \quad EF_c\beta_6 = +\,0{,}273.$$

Weiter ist:

$EF_c d_1 = -\,\Sigma\, S_0 S_1 s\, \frac{F_c}{F} = EF_c c_1$, $EF_c d_2 = EF_c c_2 \ldots\ldots$, $EF_c d_6 = EF_c c_6$, unter 2.) bereits berechnet; und

$$EF_c d_1' = -\left(\Sigma S_0 S_1' s\, \frac{F_c}{F} + \int M_0 M_1'\, \frac{F_c}{J}\, dx\right)$$

. . . .

$$EF_c d_6' = -\left(\Sigma S_0 S_6' s\, \frac{F_c}{F} + \int M_0 M_6'\, \frac{F_c}{J}\, dx\right).$$

Die Summenwerte $\Sigma S_0 S_r' s\, \frac{F_c}{F}$ können mit Hilfe der Spannkrafttabellen sofort berechnet werden. Um die Integration ausführen zu können, müssen zunächst die Momente M_{om} (in der Meridianebene) aus der äußeren Belastung ermittelt werden. Zu diesem Zwecke sei angenommen, daß die durch die Verschalung auf die Sparren übertragene Belastung als gleichmäßig verteilt gelten kann, abgesehen von den nach unten zunehmenden Belastungsbreiten. Die Belastungsfläche des Sparrens 2″—2′—2 aus Wind auf die

Scheibe III. ist in Abb. 11 dargestellt. Sie liefert in der Belastungsebene des Sparrens im oberen Teil ein Moment:

$$\overset{ob}{M_0} = \left(\frac{l^2}{2} W w_R + \frac{l^2}{6} 0{,}5\, W w_D\right),$$

wobei

$$w_R = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}, \qquad w_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}, \qquad W = 150 \ \mathbf{kg/m}$$

ist. Daraus ergibt sich:

$$\overset{ob}{M_0} = \frac{W}{12}(7\,x l^2 - 6\,x^2 l - x^3), \quad \text{und entsprechend} \quad \overset{ut}{M_0} = \frac{W}{12}(10\,x l^2 - 9\,x^2 l - x^3).$$

Die korrespondierenden Werte aus Wind auf Scheibe II erhält man durch Multiplikation mit $\sin^2 \alpha = {}^1/_4$.

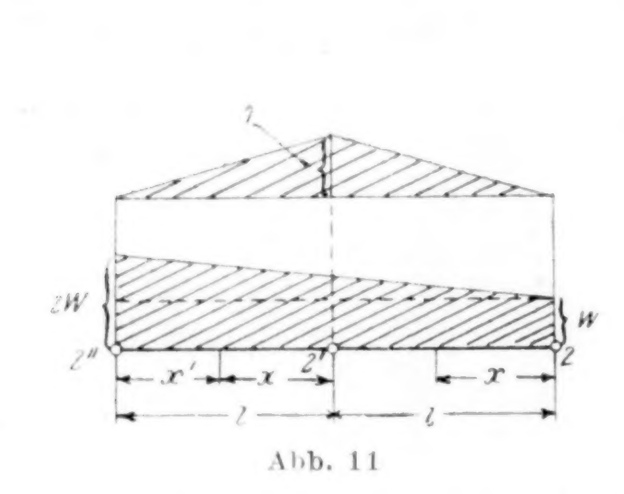


Abb. 11

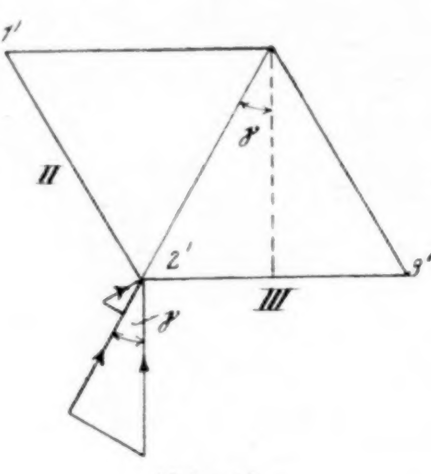


Abb. 12

Nun ergibt sich der in die Meridianebene entfallende Beitrag der Momente aus Wind auf beide Scheiben unter Beachtung von Abb. 12 zu:

$$\overset{ob}{M}_{om} = \overset{ob}{M_0}(1 + {}^1/_4)\cos\gamma; \quad \overset{ut}{M}_{om} = \overset{ut}{M_0}(1 + {}^1/_4)\cos\gamma,$$

wobei $\cos\gamma = 0{,}866$ aus den Systemabmessungen entnommen wird. Da ferner $\overset{ob}{M_2'} = 1\,\frac{x}{l}$ und $\overset{ut}{M_2'} = 1\,\frac{l-x}{l}$ ist, so kann nunmehr die Integration ausgeführt werden. In ähnlicher Weise verfährt man bei den übrigen Sparren. Man erhält schließlich nach Einführung der Zahlenwerte:

$$EF_c d_1' = -380\,114; \quad EF_c d_2' = -1\,875\,114; \quad EF_c d_3' = -1\,861\,446;$$
$$EF_c d_4' = -368\,082; \quad EF_c d_5' = -3\,619; \quad EF_c d_6' = -2\,345.$$

Nach Gl. (32) ist für $n = 6$ und $r = 1$:

$$\frac{A_1}{\Delta} = {}^1/_6 \left\{\frac{d_0}{F_0} + \frac{d_\nu}{F_\nu} + 2\sum_{k=1}^{k=2} \frac{\varphi(\delta, z_k)}{F_k}\right\},$$

wobei nach den unter I, **2** gegebenen Erläuterungen zu setzen ist:

$$d_0 = \delta_1 + 2(\delta_2 + \delta_3) + \delta_4; \quad d_{\frac{n}{2}} = \delta_1 - 2(\delta_2 - \delta_3) - \delta_4;$$

$$F_0 = a_0 d_0 - b_0^2; \quad b_0 = \sum_1^6 \beta; \quad F_\nu = a_\nu d_\nu - b_\nu^2; \quad b_\nu = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 + \beta_5 - \beta_6;$$

$$\varphi(\delta, z_k) = \delta_1 + 2\sum_{r=1}^{r=2} \delta_{(r+1)} \cos rk\frac{\pi}{3} + \delta_4(-1)^k;$$

$$F_k = \varphi(\alpha, z_k)\,\varphi(\delta, z_k) - [\psi(\beta, z_k)^2 + \psi'(\beta, z_k)^2];$$

$$\psi(\beta, z_k) = \beta_1 + \sum_{r=1}^{r=5} \beta_{(r+1)} \cos rk\frac{\pi}{3}; \quad \psi'(\beta, z_k) = \sum_{r=1}^{r=5} \beta_{(r+1)} \sin rk\frac{\pi}{3}.$$

Nach Einführung der oben gefundenen Zahlenwerte ergibt sich:

$$d_0 EF_c = +25{,}527; \quad d_{\frac{n}{2}} EF_c = +25{,}765; \quad EF_c b_0 = 0; \quad EF_c b_{\frac{n}{2}} = -1{,}3,$$

während a_0 und $a_{\frac{n}{2}}$ bereits unter 2.) berechnet sind. Demnach wird:

$$F_0 EF_c^2 = +867{,}918; \quad F_{\frac{n}{2}} EF_c^2 = +897{,}509.$$

Weiter ist:

$$EF_c\varphi(\delta, z_1) = EF_c\left[\delta_1 + 2\left(\delta_2 \cos\frac{\pi}{3} + \delta_3 \cos\frac{2\pi}{3}\right) - \delta_4\right] = +\,25{,}586,$$

$$EF_c\varphi(\delta, z_2) = EF_c\left[\delta_1 + 2\left(\delta_2 \cos\frac{2\pi}{3} + \delta_3 \cos\frac{4\pi}{3}\right) + \delta_4\right] = +\,25{,}705,$$

$$EF_c\psi(\beta, z_1) = EF_c\left[\beta_1 + \beta_2 \cos\frac{\pi}{3} + \beta_3 \cos\frac{2\pi}{3} + \beta_4 \cos\pi + \beta_5 \cos\frac{4\pi}{3} + \beta_6 \cos\frac{5\pi}{3}\right]$$
$$= -\,0{,}0062,$$

$$EF_c\psi(\beta, z_2) = EF_c\left[\beta_1 + \beta_2 \cos\frac{2\pi}{3} + \beta_3 \cos\frac{4\pi}{3} + \beta_4 \cos 2\pi + \beta_5 \cos\frac{8\pi}{3} + \beta_6 \cos\frac{10\pi}{3}\right]$$
$$= -\,0{,}602,$$

$$EF_c\psi'(\beta, z_1) = EF_c\left[\beta_2 \sin\frac{\pi}{3} + \beta_3 \sin\frac{2\pi}{3} + \beta_4 \sin\pi + \beta_5 \sin\frac{4\pi}{3} + \beta_6 \sin\frac{5\pi}{3}\right]$$
$$= +\,0{,}0043,$$

$$EF_c\psi'(\beta, z_2) = EF_c\left[\beta_2 \sin\frac{2\pi}{3} + \beta_3 \sin\frac{4\pi}{3} + \beta_4 \sin 2\pi + \beta_5 \sin\frac{8\pi}{3} + \beta_6 \sin\frac{10\pi}{3}\right]$$
$$= +\,0{,}1675,$$

während $\varphi(\alpha, z_k)$ unter 2.) bereits berechnet ist. Somit wird:

$$EF_c^2F_1 = +\,726{,}662; \quad EF_c^2F_2 = +\,619{,}1.$$

Man findet also endlich:

$$\frac{A_1}{EF_c\Delta} = {}^1/_6\left\{\frac{25{,}527}{867{,}918} + \frac{25{,}765}{897{,}509} + 2\left(\frac{25{,}586}{726{,}662} + \frac{25{,}705}{619{,}1}\right)\right\} = +\,0{,}03527$$

und in analoger Weise

$$\frac{A_2}{EF_c\Delta} = -\,0{,}000945; \quad \frac{A_3}{EF_c\Delta} = -\,0{,}00309; \quad \frac{A_4}{EF_c\Delta} = +\,0{,}00221.$$

Unter Benutzung der oben berechneten Größen erhält man aus Gl. (33) und (36) auch die Unterdeterminanten D und B:

$$\frac{D_1}{EF_c\Delta} = +\,0{,}03901; \quad \frac{D_2}{EF_c\Delta} = +\,0{,}000072; \quad \frac{D_3}{EF_c\Delta} = +\,0{,}000008; \quad \frac{D_4}{EF_c\Delta} = -\,0{,}000003;$$

$$\frac{B_1}{EF_c\Delta} = +\,0{,}00057; \quad \frac{B_2}{EF_c\Delta} = -\,0{,}00048; \quad \frac{B_3}{EF_c\Delta} = +\,0{,}000155;$$

$$\frac{B_4}{EF_c\Delta} = -\,0{,}000082; \quad \frac{B_5}{EF_c\Delta} = +\,0{,}000002; \quad \frac{B_6}{EF_c\Delta} = -\,0{,}000322.$$

Setzt man jetzt die oben gefundenen Werte für d, d', A, B, D in die Gleichungen (38) ein, so liefern diese die statisch unbestimmten Knotenmomente in den oberen Ringecken: $X_1 = -\,4765$ cmkg; $X_2 = +\,2795$ cmkg; $X_3 = +\,2083$ cmkg;
$X_4 = -\,4840$ » ; $X_5 = +\,3208$ » ; $X_6 = +\,2224$ »

und ferner die Sparrenmomente über dem Mittelring:

$Y_1' = -\,15072$ cmkg; $Y_2' = -\,73230$ cmkg; $Y_3' = -\,72762$ cmkg;
$Y_4' = -\,14631$ » ; $Y_5' = -\,91$ » ; $Y_6' = -\,121$ » .

Zur Berechnung der tatsächlichen Stabspannkräfte schreiben wir jetzt die Gleichung an:

$$S = S_0 + \sum_{r=1}^{r=6} S_r X_r + \sum_{r=1}^{r=6} S_r' Y_r'.$$

Sie liefert die in nachstehende Tabelle eingetragenen Spannkräfte.

Tafel der tatsächlichen Spannkräfte.

Stab	S kg	Stab	S kg	Stab	S kg	Stab	S kg	Stab	S kg	Stab	S kg
R_1	+ 15	R_1'	+ 112	D_1	− 314	D_1'	− 760	V_1	+ 289	V_1'	+ 433
R_2	− 92	R_2'	− 37	D_2	− 517	D_2'	− 2621	V_2	+ 495	V_2'	+ 2571
R_3	− 170	R_3'	− 1266	D_3	− 16	D_3'	− 6	V_3	+ 44	V_3'	+ 465
R_4	− 383	R_4'	− 1945	D_4	+ 527	D_4'	+ 2626	V_4	− 469	V_4'	− 2329
R_5	− 155	R_5'	− 507	D_5	+ 341	D_5'	+ 772	V_5	− 307	V_5'	− 959
R_6	+ 49	R_6'	+ 8	D_6	− 22	D_6'	− 12	V_6	+ 20	V_6'	− 253

Es bleibt nur noch übrig, die Momente in den Sparren anzugeben. Für diese gilt (vergl. Abb. 11):

$$\overset{r\,ob}{M_m} = \overset{r\,ob}{M_{om}} + Y_r' \frac{x}{l}\,; \qquad \overset{r\,ut}{M_m} = \overset{r\,ut}{M_{om}} + Y_r' \frac{x'}{l}\,,$$

wobei der Zeiger m das Moment in der Meridianebene angibt. Für die Sparren $1''-1'-1$ und $2''-2'-2$ sind die Momente nachstehend ermittelt.

$\frac{x}{l}$	$\overset{2\,ob}{M_{om}}$ kgm	$Y_2' \frac{x}{l}$ kgm	$\overset{2\,ob}{M_m}$	$\overset{2\,ut}{M_{om}}$ kgm	$Y_2' \frac{x'}{l}$ kgm	$\overset{2\,ut}{M_m}$	$\overset{1\,ob}{M_{om}}$ kgm	$Y_1' \frac{x}{l}$ kgm	$\overset{1\,ob}{M_m}$	$\overset{1\,ut}{M_{om}}$ kgm	$Y_1' \frac{x'}{l}$ kgm	$\overset{1\,ut}{M_m}$
0,0	0	0	0	0	− 732	− 732	0	0	0	0	− 151	− 151
0,1	+ 216	− 73	+ 143	+ 307	− 659	− 352	+ 43	− 15	+ 28	+ 61	− 136	− 75
0,2	+ 390	− 146	+ 244	+ 551	− 586	− 35	+ 78	− 30	+ 48	+ 110	− 121	− 11
0,3	+ 518	− 220	+ 298	+ 731	− 513	+ 218	+ 104	− 45	+ 59	+ 146	− 106	+ 40
0,4	+ 601	− 293	+ 308	+ 844	− 439	+ 405	+ 120	− 60	+ 60	+ 169	− 90	+ 79
0,5	+ 635	− 366	+ 269	+ 888	− 366	+ 522	+ 127	− 75	+ 52	+ 178	− 75	+ 103
0,6	+ 617	− 439	+ 178	+ 861	− 293	+ 568	+ 123	− 90	+ 33	+ 172	− 60	+ 112
0,7	+ 547	− 513	+ 34	+ 760	− 220	+ 540	+ 109	− 106	+ 3	+ 152	− 45	+ 107
0,8	+ 422	− 586	− 164	+ 585	− 146	+ 439	+ 84	− 121	− 37	+ 117	− 30	+ 87
0,9	+ 241	− 659	− 418	+ 332	− 73	+ 259	+ 48	− 136	− 88	+ 66	− 15	+ 51
1,0	0	− 732	− 732	0	0	0	0	− 151	− 151	0	0	0

Der vorstehend an einem Zahlenbeispiel durchgeführte Rechnungsgang zeigt klar und deutlich, daß die Spannungsverhältnisse in räumlichen Fachwerken wesentliche Aenderungen erfahren, sobald Versteifungen des Systems in der hier betrachteten Weise vorgenommen werden. Wenn auch das vorstehend behandelte Beispiel allgemeine Schlüsse auf beliebige andere Formen nicht zuläßt, so lehren doch die Zahlen, daß man gut tut, bei praktischen Ausführungen sich Rechenschaft über die tatsächlichen Spannungen abzulegen, sobald man das Tragwerk mit Rücksicht auf die zu erwartenden Deformationen versteift. 49

Lösung des Torsionsproblems für Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt.

Von **P. NEMÉNYI** in Berlin.

Die in der Praxis vorkommenden Querschnittsformen von Stäben, die auf Torsion beansprucht werden, sind nicht selten — man denke an Hohlwellen oder Kastenträger — zweifach oder mehrfach zusammenhängend [2]). In meiner Arbeit über das Saint-Venantsche Biegungsproblem [3]) habe ich nun zur Lösung der Torsionsfrage bemerkt: »Runges numerisch graphisches Verfahren ließe sich ganz unverändert auf mehrfach zusammenhängende Querschnitte übertragen, falls man im vorhinein für jede innere geschlossene Randkurve des mehrfach zusammenhängenden Querschnittes den ihr eigenen konstanten Wert der Funktion $u(x,y)$ (also bei n-fach zusammenhängendem Querschnitte $n-1$-Konstante) kennen würde; dies ist aber zunächst nicht der Fall. Die Ueberwindung der hierin liegenden Schwierigkeit und damit die Verallgemeinerung der Rungeschen Lösung des Torsionsproblems auf beliebig vielfach zusammenhängende Querschnitte bildet den Gegenstand einer in Vorbereitung befindlichen Abhandlung des Verfassers.«

---

[1]) Vorliegende Abhandlung ist eine unveränderte deutsche Bearbeitung meines ungarischen Aufsatzes, welcher der Sitzung der III. Abteilung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 17. I. l. J. vorgelegt wurde.

[2]) Ein Querschnitt heißt »zweifach (bezw. n-fach) zusammenhängend«, wenn er durch eine passend gezogene Schnittlinie, die von einem Randpunkt ausgeht und an einem Randpunkt endet (bezw. durch $n-1$ solcher Schnitte) noch nicht in getrennte Teile zerlegt wird. Für die Anwendungen genügt es zu wissen, daß ein Querschnitt, der von einem äußeren Rand und $n-1$ inneren Ausnehmungen gebildet wird, n-fach zusammenhängend ist.

[3]) Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 1, 1921, S. 89 bis 96.

Die vorliegende Arbeit tritt der Verwirklichung dieses Planes näher und liefert, meines Wissens (abgesehen von der Prandtlschen Experimentalmethode) zum erstenmal, die Andeutung eines allgemeinen praktisch brauchbaren Verfahrens zur Lösung des Torsionsproblems für ganz beliebige, event. nur zeichnerisch gegebene Querschnitte[1], die von einer »äußeren« Berandungslinie und $n-1$ »inneren« Rändern, im ganzen also von n geschlossenen Kurven begrenzt sind. Die vollständige Durchführung des Verfahrens an Beispielen soll in einer späteren Arbeit nachgetragen werden.

Die Grundlage unserer Methode bildet folgender Prandtlsche Satz[2]:

Der Zusammenhang $\int \tau\, ds = 2\, G \vartheta F$ — wo G den Schubelastizitätsmodul, ϑ den Verdrehungswinkel pro Stablängeneinheit, $\int \tau\, ds$ das längs einer Schubspannungstrajektorie genommene Randintegral der Schubspannung und schließlich F die von dieser Schubspannungstrajektorie eingeschlossene Fläche bedeutet — bleibt unverändert aufrecht auch für alle Schubspannungstrajektorien n-fach zusammenhängender Querschnitte und so auch für sämtliche $n-1$ innere Begrenzungskurven derselben[3]). Diese Gleichungen, im Vereine mit der Bedingung, daß sämtliche Schubspannungen sich zu einem Torsionsmoment von der gegebenen Größe M zusammensetzen lassen müssen, genügen — wie wir sehen werden — zur Bestimmung sämtlicher unbestimmten Konstanten. Es würde nämlich genügen, die Torsionsfunktion u für alle Punkte[4]) eines über den Querschnitt gelegten Gitters als Funktion der zu den Begrenzungskurven gehörenden n konstanten u-Werte auszurechnen (diese Funktionen sind, wie man leicht einsieht, durchwegs linear) und dann für diesen, n unbestimmte Parameter enthaltenden Spannungszustand die obigen Bedingungen anzusetzen, um die n Parameter zu bestimmen. Dieses Verfahren wäre aber außerordentlich schwerfällig und unübersichtlich.

Dem Wesen nach wird vollständig dasselbe geleistet, nur in einer weitaus übersichtlicheren und handlicheren Form, durch die folgende Methode, die wohl auch vom mathematischen Gesichtspunkte aus ein gewisses Interesse verdient.

Ich wähle als Ausgangspunkt die Prandtlsche Fassung des Torsionsproblems, die bekanntlich wie folgt formuliert werden kann: Die Schubspannungen τ fallen überall in die Richtung der Schichtenlinien einer Fläche mit der Ordinate u, und ihre Größe ist in jedem Punkte dem Gefälle der Fläche u an der betreffenden Stelle gleich: $\tau = \frac{\partial u}{\partial n}$. Die Lösung des Torsionsproblems besteht darin, diese Fläche u ausfindig zu machen, und zu diesem Zwecke dienen folgende definierende Bedingungen: 1. Im ganzen Bereich gilt $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\, G \vartheta = A_0$, wo A_0 eine Konstante bedeutet. 2. Längs jeder Begrenzungskurve nimmt u einen konstanten Wert an; diese Konstante kann für die eine der Begrenzungskurven ohne Beeinflussung des Spannungszustandes frei gewählt werden; es sei also für die äußere Begrenzungskurve $u = 0$; die entsprechenden konstanten Werte für die inneren Begrenzungskurven wollen wir der Reihe nach mit $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_i \ldots, A_{n-1}$ bezeichnen, wo der Index der Konstanten A mit jenem der betreffenden Konturkurve übereinstimmt. 3. Für jede Schichtenlinie der Fläche u und darunter selbstverständlich auch für jede der inneren Konturkurven ist:

$$\int \tau\, ds = \int \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 2\, G \vartheta F = A_0 F,$$

[1]) Das Bredt-Lorentzsche Verfahren bezieht sich nämlich bloß auf dünnwandige Profile und gibt für solche in außerordentlich eleganter Weise mit der Elastizitätslehre gut übereinstimmende Näherungslösungen; für dickwandige Querschnitte und speziell für solche Querschnitte, deren Höhlungen gegenüber den Hauptabmessungen des Querschnitts klein sind, versagt es aber vollständig.

[2]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 13, 1904, S. 35

[3]) Vgl. auch A. u. L. Föppl, Drang und Zwang II, München 1920, S. 106. Der durch Prandtl selbst a. a. O. angedeutete unmittelbare Beweis ist der folgende: Die Querschnitts-Verwölbung z hängt mit den Spannungskomponenten durch die Gl. $\tau_x = G\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \vartheta x\right)$, $\tau_y = G\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \vartheta y\right)$ zusammen. Erweitert man die erste mit dx, die zweite mit dy, integriert und addiert, so steht links das Linienintegral $\int \tau\, ds$; rechts hat man zuerst das Integral des totalen Differentials dz, das verschwindet, und dann zweimal $G\vartheta$ mal dem Flächeninhalt $\int x\, dy$ bezw. $-\int y\, dx$.

[4]) Zeitschrift für Mathematik und Physik 56, 1908, S. 225.

wo F den Inhalt der von der betreffenden Schichtenlinie eingeschlossenen Fläche bedeutet. 4. Das von u abgeleitete Schubspannungssystem τ ist statisch einem gegebenen Torsionsmomente M äquivalent; also wenn mit F die Querschnittsfläche bezeichnet wird,

$$M = \int_F (\tau_{xz} y + \tau_{yz} x) d\mathrm{F} = \int_F \left(-\frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial x} x\right) d\mathrm{F}.$$

Hiermit ist die Fragestellung des Torsionsproblems im Sinne **Prandtls** dargelegt, und nun behaupte ich, daß deren Lösung in folgender Form gegeben werden kann:

$$u = A_0 v_p + A_1 v_{l,1} + A_2 v_{l,2} + \ldots + A_i v_{l,i} + \ldots + A_{n-1} v_{l,n-1} \quad . \quad . \quad (\mathrm{u}),$$

wo sämtliche Größen A konstant sind, wo die Funktion v_p der Differentialgleichung

$$\nabla^2 v_p = \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial y^2} = 1$$

genügt und längs jeder der Begrenzungskurven den Wert 0 annimmt; ferner wo jede der Funktionen $v_{l,i}$ der Laplaceschen Differentialgleichung genügt, also:

$$\nabla^2 v_{l,i} = \frac{\partial^2 v_{l,i}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{l,i}}{\partial y^2} = 0$$

und längs allen Begrenzungskurven den Wert 0 annimmt, bis auf jene mit dem Index i; längs dieser letzteren nimmt sie den konstanten Wert 1 an.

Daß bei entsprechender Wahl der Konstanten A, die unter (u) angesetzte Funktion u allen vier definierenden Bedingungen tatsächlich genügt, läßt sich leicht nachweisen. Zu diesem Zwecke wenden wir zunächst die Operation $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ auf die obige Funktion u an; dann haben wir, da die Addition und die Multiplikation mit Konstanten mit der Operation ∇^2 bezüglich der Reihenfolge vertauschbar ist,

$$\nabla^2 u = A_0 1 + A_1 0 + A_2 0 + \ldots + A_i 0 + \ldots + A_{n-1} 0 = A_0,$$

daher genügt die unter (u) angesetzte Funktion u der obigen Bedingung (1). Ebenso ist, und zwar ebenfalls bei beliebiger Wahl der Konstanten A, die zweite, auf die Konstanz von u längs der einzelnen Begrenzungskurven bezügliche Bedingung automatisch erfüllt und man sieht sofort, daß die unter (u) angesetzte Funktion u längs der äußeren Begrenzungskurve überall gleich 0 ist und längs der inneren Begrenzungskurve i überall den konstanten Wert A_i annimmt. — Aus der dritten und vierten Bedingung schließlich läßt sich die numerische Größe der n vorläufig unbekannten Konstanten A errechnen. Die Bedingung (3) liefert nämlich, auf die $n-1$ innere Begrenzungskurven angewendet, die folgenden $n-1$ linearen Gleichungen:

$$A_0 F_1 = A_0 \int_{(1)} \frac{\partial v_p}{\partial n} ds + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \int_{(1)} \frac{\partial v_{l,i}}{\partial n} ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\vdots$$

$$A_0 F_j = A_0 \int_{(j)} \frac{\partial v_p}{\partial n} ds + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \int_{(j)} \frac{\partial v_{l,i}}{\partial n} ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (j),$$

$$\vdots$$

$$A_0 F_{n-1} = A_0 \int_{(n-1)} \frac{\partial v_p}{\partial n} ds + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \int_{(n-1)} \frac{\partial v_{l,i}}{\partial n} ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n-1),$$

wo allgemein $\int_{(j)} \frac{\partial v}{\partial n} ds$ das Randintegral längs der Begrenzungskurve j der nach der Normalen dieser Kurve gebildeten Ableitung der Funktion v und Fj den von der Berandung j eingeschlossenen Flächeninhalt bedeutet.

Die Bedingung (4) liefert die n-te Gleichung und zwar:

$$M = A_0 \int_{(\mathrm{F})} \left(-\frac{\partial v_p}{\partial y} y + \frac{\partial v_p}{\partial x} x\right) d\mathrm{F} + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \int_{(\mathrm{F})} \left(-\frac{\partial v_{l,i}}{\partial y} y + \frac{\partial v_{l,i}}{\partial x} x\right) d\mathrm{F} \quad . \quad . \quad (n),$$

wobei F die Querschnittfläche bedeutet. (Der Buchstabe n dient in den obigen Gleichungen gleichzeitig zur Bezeichnung der Normalenrichtung und der Anzahl der Begrenzungskurven, was aber keinen Anlaß zu Mißverständnissen geben darf.)

So haben wir ein nicht homogenes System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten (A_0, A_1, ... A_i, ... A_{n-1}), aus welchem die Unbekannten bestimmt werden können. Unser Verfahren besteht also darin, daß wir durch n-malige Anwendung der Rungeschen numerisch-graphischen Methode die Funktionen v_p, $v_{l,1}$, $v_{l,2}$, ... $v_{l,i}$, ... $v_{l,n-1}$ bestimmen, deren Schichtenpläne aufzeichnen und mit Hilfe dieser die Zahlenwerte der in den Gleichungen (1) —(n) als Koeffizienten fungierenden bestimmten Integrale auf numerischem oder graphischen Wege bestimmen, in das Gleichungssystem einsetzen und dieses auflösen. — So erhalten wir die Zahlenwerte der Konstanten A_0, A_1, ... A_i, ... A_{n-1} und mit Hife dieser Konstanten läßt sich auf Grund der Gleichung (u) vermittels Superposition auch der Schichtenplan der gesuchten Fläche entwerfen, womit ein anschauliches Spannungsbild erreicht und unsre Aufgabe vollständig gelöst ist.

A. und L. Föppl unterwerfen in ihrem Buche[1]) das auf Hohlstäbe angewendete Prandtlsche Experimentalverfahren (Membranexperiment) einer kritischen Besprechung, wobei sie zum Ergebnis gelangen, daß das genannte Verfahren zur qualitativen Beleuchtung der tatsächlichen Verhältnisse zwar außerordentlich gut geeignet ist, aber zur quantitativen Lösung des Torsionsproblems für Hohlquerschnitte praktisch als unbrauchbar bezeichnet werden muß. Der Umstand, daß bei dieser Experimentalmethode einer jeden Höhlung eine nach dieser geformte, zu ihrer eigenen Ebene senkrecht geführte starre Scheibe entspricht, an deren Rand sich die Membran anschließen muß, erschwert tatsächlich die praktische Durchführung außerordentlich, da die Bedingung der geraden Führung sich kaum ohne nennenswerte Reibungswiderstände und noch schwieriger der Anschluß der Membran sich verwirklichen bzw. mit einer luftdichten Anordnung vereinbaren läßt; so daß wir Föppls abschlägigem Urteil beistimmen müssen. Wir sind aber in der Lage, ein zwar unter Umständen recht zeitraubendes, aber bis zu einer bedeutenden Genauigkeit zuverlässig durchführbares Verfahren vorzuschlagen, das eine Kombination der Prandtlschen Experimentalmethode und unseres rechnerischen Verfahrens bildet. — Diese Kombination besteht darin, daß wir die oben definierten Funktionen v_p, $v_{l,1}$, $v_{l,2}$, ... $v_{l,i}$, ... $v_{l,n-1}$ anstatt nach Runges numerisch-graphischem Verfahren vermittelst Membranexperiments herstellen, was auf keinerlei Schwierigkeiten stoßen kann, und aus diesen die Konstanten A und hierauf die Funktion u unverändert nach der oben entwickelten Methode bestimmen. 40

Drehschwingungen von Wellen und geradlinige Schwingungen von Massen zwischen Federn.

Von **O. FÖPPL** in Braunschweig.

Die Aufgabe, die Eigenschwingungszahlen für Wellen, die mehrere Schwungmassen tragen, zu bestimmen, ist schon oft behandelt worden. Die strenge Lösung führt bei mehr als drei Schwungmassen auf so unförmige Ausdrücke, daß der Auswertung große Schwierigkeiten entgegen stehen. In der Praxis bestimmt man deshalb die Eigenschwingungszahlen gewöhnlich nach einem Probierverfahren, das von Geiger[2]) angegeben worden ist. Nach dem Geigerschen Verfahren werden die Momente berechnet, die aufgewandt werden müssen, um die zu untersuchende Welle mit einer beliebigen Schwingungszahl schwingen zu lassen (erzwungene Schwingung). Es kann eine Kurve aufgetragen werden, die die Abhängigkeit zwischen erzwingendem Moment und Drehzahl darstellt: Die Drehzahlen, bei denen das erzwingende Moment Null ist, sind die Eigenschwingungszahlen.

Im nachfolgenden werden die Momente, die bei einer Eigenschwingung einer mehrere Schwungmassen tragenden Welle auftreten, so zerlegt, daß die Aufgabe auf den einfachsten Fall einer Welle, die an einem Ende festgehalten ist und am andern Ende eine

[1]) a. a. O. S. 103 bis 108.

[2]) J. Geiger-Augsburg, »Ueber Verdrehungsschwingungen von Wellen, insbesondere von mehrkurbeligen Schiffsmaschinenwellen«. Dissertation Berlin, Techn. Hochsch. 1914. Geiger stützt sich vor allem auf die Arbeiten von Frahm, »Neuere Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in Wellenleitungen . . .«, Z. d. V. d. Ing. 1902, S. 880 und Gümbel, »Verdrehungserscheinungen eines Stabes . . .«, Z. d. V. d. Ing. 1912, S. 1025.

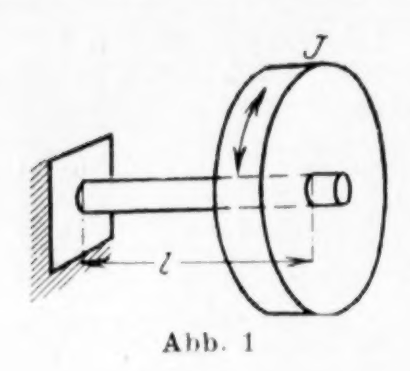


Abb. 1

Schwungmasse trägt, zurückgeführt erscheint. Es wird dabei stets vorausgesetzt, daß weder äußere Kräfte noch innere Reibungen an der Schwunganordnung auftreten.

1. Eine Schwungmasse auf einer Welle. Es sei G das Gewicht der Schwungscheibe, Abb. 1, g die Erdbeschleunigung, i der Trägheitshalbmesser, $J = i^2 \frac{G}{g}$ das Trägheitsmoment und k das Moment, das infolge der elastischen Gegenkräfte der Welle bei einer Verdrehung der Schwungmasse um den Einheitswinkel auftritt; es ist also $M = k\varphi$ das Moment, das bei Verdrehung um den Winkel φ aus der Nullage besteht. Dann lautet die dynamische Grundgleichung:

$$k\varphi = -J \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mit der Lösung:

$$\varphi = A \sin \sqrt{\frac{k}{J}}\, t + B \cos \sqrt{\frac{k}{J}}\, t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Der Vorgang wiederholt sich, so oft der Wert $\sqrt{\frac{k}{J}}\, t$ um 2π anwächst; die Schwingungsdauer T ist also gleich $2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}$.

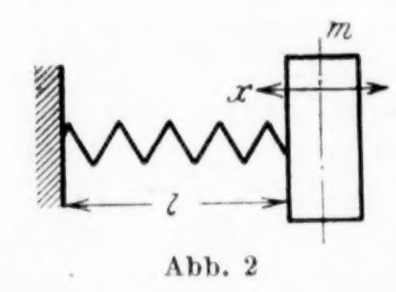


Abb. 2

Eine ähnliche Betrachtung läßt sich durchführen für eine geradlinig unter dem Einfluß einer Feder schwingende Masse, Abb. 2. Da die dynamische Grundgleichung für die geradlinige Bewegung die gleiche Form hat wie für die Drehbewegung, kommt man auf eine der Gleichung (2) ähnliche Lösung der Differentialgleichung, die man auch erhält, wenn man in Gl. (2) φ durch den Massenweg x, J durch die Masse m und k durch die Spannkraft j der Feder, die bei einer Aenderung der Länge um die Einheit auftritt, ersetzt:

$$jx = -m \frac{d^2x}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{j}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Da Federn von verschiedener Länge und Stärke gleiche Ergebnisse liefern, wenn sie bei gleicher Auslenkung x gleiche Rücktriebkräfte auslösen, kann man die beiden Veränderlichen, die bei zwei Federn von den Längen l' und l'' und den Spannkräften j' und j'' auftreten, durch die eine Veränderliche l einer Bezugseinheitsfeder ersetzen, wobei $j = \frac{c}{l}$ ist. Die Bezugsfeder hat bei der Länge 1 und der Längenänderung x die Spannkraft cx, oder c ist das Hundertfache der Kraft, die an der Einheitsfeder von der Länge 1 auftritt, wenn man ihre Länge um $^1/_{100}$ des ursprünglichen Betrages ändert; c hat die Dimension kg. Die Verschiedenheiten in den Abmessungen der tatsächlich vorkommenden Federn sind durch die verschiedenen Längen l der Bezugsfedern wiedergegeben.

Zwischen der Verdrehungsschwingungen ausführenden Welle und der geradlinige Schwingungen ausführenden Massenanordnung kann man unter Benutzung eines Maßstabes γ von der Dimension cm^2 die Beziehung aufstellen

$$J = \gamma m \quad \text{und} \quad c_M = \gamma c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wobei c_M die Unveränderliche der Einheitswelle ist. Es ist also $\frac{c_M}{l}$ das Drehmoment, das ausgelöst wird, wenn eine l cm lange Einheitswelle um den Winkel 1 verdreht wird, $\frac{c_M}{l} = k$. In den nachfolgenden Ausführungen ist nur von geradlinig schwingenden Massenanordnungen die Rede. Die Beziehungen (5) ermöglichen sofort die Uebertragung der gewonnenen Ergebnisse auf Drehschwingungen.

Die Schwingungsdauer der Anordnung Abb. 2 hängt nach Gleich. 4 nur ab von dem Produkt ml. Im nachfolgenden wird die Länge der Einheitsfeder durch einen wagerechten Strich und die Masse m durch einen senkrechten Strich dargestellt.

2. Mehrere Massen und Federn mit einem Festpunkte. In Abb. 3 ist die Anordnung einer Masse zwischen zwei Federn, von denen jede an einem Ende festgehalten ist, wiedergegeben. Es wird angenommen, daß die beiden Federn in der Abbildung schon auf die Einheitsfederstärke c zurückgeführt sind, so daß sie durch die Angabe der Längen l_1 und l_2 bestimmt sind. Zur Berechnung der Schwingungsdauer teilen wir m im Verhältnis $\frac{l_2}{l_1}$ in m_1 und m_2. Es ist also $m_1 l_1 = m_2 l_2$, ferner $m_1 + m_2 = m$. Die beiden durch die Unterteilung erhaltenen Anordnungen haben nach Gl. (4) gleiche Schwingungsdauer, oder, wenn m_1 und m_2 nach der Teilung um den gleichen Betrag aus der Mittellage nach der gleichen Richtung gezogen sind und zur gleichen Zeit losgelassen werden, schwingen beide dauernd parallel nebeneinander her, als wären sie ein ungeteilter Körper. Der Bewegungsvorgang wird nicht beeinflußt, wenn man sich die beiden Massen wieder vereinigt denkt;

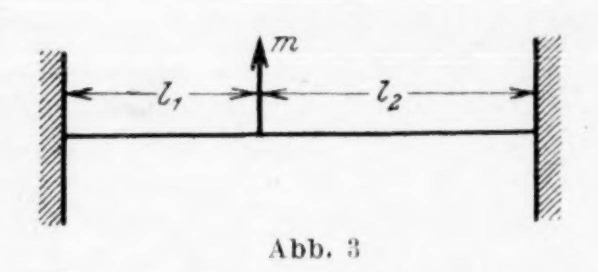


Abb. 3

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{m l_1 l_2}{c\,(l_1 + l_2)}}$ ist deshalb auch die Schwingungsdauer der Anordnung Abb. 3 mit den vereinigten Massen m_1 und m_2.

Eine gleiche Zergliederung in einzelne schwingende Massen führt auch bei verwickelteren Anordnungen zum Ziel. Hat man z. B. zwei Massen, Abb. 4, die zwischen zwei Federn schwingen, deren eines Ende festgehalten ist, so kann man m_1 zergliedern in μm_1 und $(1 - \mu) m_1$ und l_2 in λl_2 und $(1 - \lambda) l_2$, derart, daß

$$\mu m_1 l_1 = (1 - \mu) m_1 \lambda l_2 = (1 - \lambda) l_2 m_2 \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Man erhält dann 3 Einzelanordnungen nach Abb. 2, von denen die zwei rechten ihren festen Stützpunkt in Q haben. Es wird angenommen, die beiden Massen μm_1 und $(1 - \mu) m_1$ schwingen nach der einen und die Masse m_2 mit einem im Verhältnis $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ größeren Ausschlag jeweils nach der entgegen gesetzten Seite. Da in Q die von der rechten und linken Anordnung herrührenden Federkräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, kann man sich die feste Stütze in Q auch entfernt denken und da die 3 Anordnungen nach Gl. (4) und (6) gleiche Schwingungsdauer haben, können die beiden Massen μm_1 und $(1 - \mu) m_1$ auch wieder wie vorhin zusammengefaßt werden;

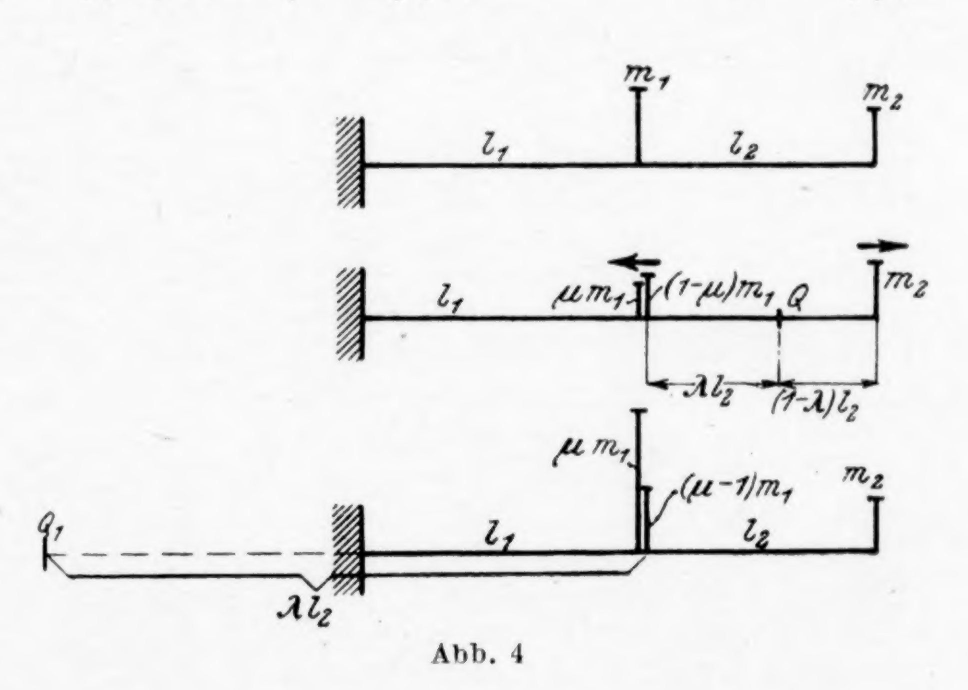


Abb. 4

$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu m_1 l_1}{c}}$ ist deshalb auch die Schwingungsdauer 2. Ordnung des vereinigten Massensystems nach Abb. 4. Die Größe der Verhältniszahlen μ und λ kann man durch Auflösen der Gleichungen (6) oder einfacher durch Probieren erhalten.

Die Gleichungen (6) liefern, da sie vom 2. Grade sind, je zwei Werte für μ und λ. Die beiden zusammen gehörenden Werte von λ und μ, die der genannten Schwingung 2. Ordnung entsprechen, sind positiv und kleiner als 1. Es findet also eine echte Teilung der Masse m_1 und der Länge l_2 statt. Die beiden übrigen Werte von μ und λ sind negativ, bezw. größer als 1. Mit dem negativen Vorzeichen der Einheitsfederlänge ist der Begriff verbunden, daß bei einer Auslenkung nach der Richtung, nach der die positiven Federn Druckkräfte auslösen, Zugkräfte erhalten werden (also Kräfte, die die Masse bei einer Auslenkung noch weiter von der Nullage weg zu bewegen suchen), und unter der negativen Masse hat man sich eine Masse vorzustellen, die mit der negativen Federlänge multipliziert, eine positive Größe unter dem Wurzelzeichen in dem Ausdruck für T ergibt. Um die Anordnung nach Abb 4 (unten) in die Einzelanordnungen zu zerlegen die nach der Zusammensetzung die Schwingung 1. Ordnung ergeben, wird m_1 mit einer

Verhältniszahl μ multipliziert, die größer als 1 ist; dann wird der überschießende Betrag von m_1 gleich $(\mu - 1)m_1$ als negative Masse mit der negativen Federlänge $-\lambda l_2$ zu einer Anordnung mit dem scheinbaren Knotenpunkt Q_1 verbunden, der außerhalb l_2 liegt und schließlich liefert die Feder von Q_1 bis m_2 zusammen mit m_2 ein schwingendes System. Wenn die Beziehung (6), die man hier in der Form anschreiben kann·

$$\mu m_1 l_1 = [-(\mu - 1)m_1](-\lambda l_2) = (1 + \lambda) l_2 m_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

erfüllt ist, so sind wieder die Schwingungsdauern der 3 Einzelanordnungen von gleicher Dauer. Die Massen μm_1 und $-(\mu - 1)m_1$ lassen sich wieder zusammensetzen zu der Masse m_1 und von den beiden Federn $-\lambda l_2$ und $(1 + \lambda) l_2$ heben sich die beiden Stücke λl_2 links von m_1, die verschiedenes Vorzeichen haben, heraus. Die ermittelte Schwingungszahl der 3 Einzelschwingungen ist deshalb auch die Schwingungszahl 1. Ordnung für das gesamte System der Abbildung 4. Die Lösungen der Gleichungen (7) kann man, namentlich wenn es nur auf angenäherte Werte ankommt, durch Probieren finden.

Um einen Anhalt für die Größe von μ, die man der ersten Annahme zugrunde legen soll, zu erhalten, kann man zuerst die Aufgabe behandeln, wie sich der Wert von $\mu m_1 l_1$ ändert, wenn man ein System von 2 gleichen Massen m_1 und m_2 mit verschiedenen Einheitsfederlängen l_1 und l_2 betrachtet, Abb. 5. Das Produkt $\mu m_1 l_1$ kann man in Beziehung setzen zu $m_s l_s$, wobei m_s die Schwerpunktsmasse und l_s die Schwerpunktsfederlänge bedeuten[1]). Die Abhängigkeit zwischen $\nu = \frac{\mu m_1 l_1}{m_s l_s}$ und $\frac{l_2}{l_s}$ ist in Abb. 6 dargestellt. Man sieht, daß ν zwischen 1 und 0,85 schwankt. Für die erste Annahme bei der Ermittlung von μ durch Probieren ist es empfehlenswert, $\mu = 0{,}9 \frac{m_s l_s}{m_1 l_1}$ oder $0{,}85 \frac{m_s l_s}{m_1 l_1}$ zu setzen.

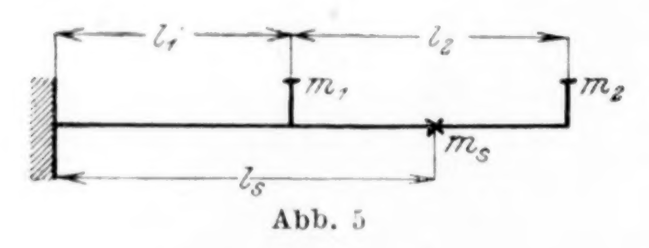


Abb. 5

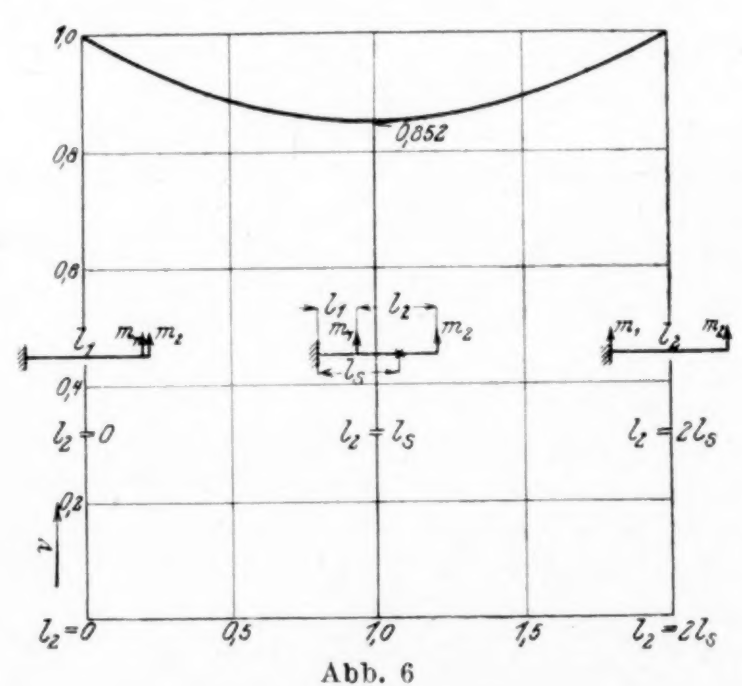


Abb. 6

Die Unterteilung der Gesamtanordnung in einzelne Schwingungskörper läßt sich auch bei beliebig vielen zwischen Federn schwingenden Massen durchführen. Hat man z. B. die Schwingungsdauer 1. Ordnung für die durch Abb. 7 dargestellte Anordnung mit 4 Massen zu berechnen, so hat man zuerst wieder die 3 ersten Massen m_1, m_2, m_3 in je 2 Teile $\mu_1 m_1$ und $(1 - \mu_1)m_1$ usw. und die 3 Längen l_2, l_3, l_4 in je 2 Teile $\lambda_2 l_2$ und $(1 - \lambda_2)l_2$ usw. zu zerlegen, wobei $\lambda < 0$ und $\mu > 1$ ist. Zu dem einen Festpunkt 0 erhält man 3 weitere außerhalb der zugehörigen Federn liegende und deshalb nur scheinbare Knotenpunkte Q_1, Q_2, Q_3, für die sich entsprechend den Gleichungen (7) die folgenden Gleichungen anschreiben lassen:

$$\mu_1 m_1 l_1 = [-(\mu_1 - 1)] m_1 [-\lambda_2 l_2] = \mu_2 m_2 [1 - (-\lambda_2)] l_2 = [-(\mu_2 - 1)] m_2$$
$$[-\lambda_3 l_3] = \mu_3 m_3 (1 + \lambda_3) l_3 = [-(\mu_3 - 1)] m_3 [-\lambda_4 l_4] = m_4 (1 + \lambda_4) l_4 \quad . \quad (8).$$

Abb. 7

Diese Gleichungen liefern, wenn man sie nach einer der Unbekannten auflöst, die strenge Lösung für die Schwingungsdauern des Systems. Wir beschränken uns im Nachfolgenden auf die weitere Behandlung durch Probieren. Um die erste Annäherung für die Schwingundsdauer T_1 zu berechnen, müssen wir eine Annahme über die Größe von μ_1 machen. Wir berechnen zuerst $m_s l_s$, das nach Abb. 7 gleich $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2$

[1]) Unter Schwerpunkt ist hier nicht der Schwerpunkt, der unter Berücksichtigung der Massenabmessungen erhalten wird, sondern der Schwerpunkt nach Abb. 5 unter Nichtberücksichtigung der Massenbreiten verstanden. Man könnte ihn mit »Schwingungsschwerpunkt« bezeichnen.

$+ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10$ ist und nehmen als Mittelwert für $\nu = 0{,}9$ an, so daß $\mu_1 = 0{,}9 \frac{m_s l_s}{m_1 l_1}$ erhalten wird. Mit diesem Wert ist die oberste Reihe der Zahlentafel 1 unter Benutzung der Formeln (8) berechnet worden. In Spalte 9 der Zahlentafel erscheint die Größe, die die letzte Masse m_4' haben müßte, damit die vorausgehende Zerlegung das richtige Ergebnis liefern würde. Eine Anordnung mit den Massen m_1, m_2, m_3 und m_4', würde also durch die Angaben der 1. Zeile der Zahlentafel in zutreffender Weise in Einzelanordnungen zerlegt und die Schwingungsdauer 1. Ordnung wäre hierfür $2\pi \sqrt{\frac{\mu_1 m_1 l_1}{c}}$. Man kann für diese Anordnung mit der Masse m_4' den Schwingungsschwerpunkt und die zugehörige Federlänge berechnen (Spalte 10) und daraus wieder das tatsächliche ν_{red}, das bei dieser Anordnung auftritt, und das in Spalte 11 als ν_{red} eingetragen worden ist. Den Wert von ν_{red} legen wir der 2. Annäherung zugrunde. Wir berechnen in der 2. Zeile der Zahlentafel das m_4'', das dem verbesserten ν entspricht und erhalten in Spalte 9 nur noch eine Abweichung gegenüber der gegebenen Schwungmasse m_4 von 1 vH, während in der 1. Zeile die Abweichung 20 vH betrug. Das in Spalte 11 in der 2. Zeile erhaltene ν_{red} liefert schon bis auf Rechenschiebergenauigkeit genau das ν für die Anordnung nach Abb. 7, wie aus der Durchrechnung der Zeile 3 ersichtlich ist.

Zur Anordnung nach Abb. 7.

$m_s l_s = 10{,}0.$ **Zahlentafel 1.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ν	$\mu_1 = \nu \frac{m_s l_s}{m_1 l_1}$	$\mu_1 m_1 l_1$	$\lambda_2 = \frac{\mu_1 m_1 l_1}{(1-\mu_1) m_1 l_2}$	$\mu_2 = \frac{\mu_1 m_1 l_1}{m_2 (1-\lambda_2) l_2}$	λ_3	μ_3	λ_4	m_4'	$m_1 l_1 + m_2 (l_1 + l_2) + \ldots + m_4' (l_1 + \ldots l_4)$	$\nu_{red} = \frac{\nu m_s l_s}{m_1 l_1 + \ldots m_4' (l_1 + \ldots)}$
0,9	9	9	− 1,125	4,237	− 2,782	2,381	− 6,52	1,197	10,79	0,832
0,832	8,32	8,32	− 1,137	3,895	− 2,875	2,149	− 7,24	1,010	10,04	0,829
0,829	8,29	8,29	− 1,138	3,880	− 2,880	2,138	− 7,29	1,000	10,0	0,829

Die Schwingungsdauer T_1 der Gesamtanordnung nach Abb. 7 ist also $2\pi \sqrt{\frac{8{,}29\, l_1 m_1}{c}}$. In ähnlicher Weise kann man die Rechnung für die Schwingungsdauer 2. Ordnung T_2 durchführen. Man erhält dann außer O noch einen zweiten Festpunkt auf einer Feder, während 2 weitere scheinbare Festpunkte außerhalb der zugehörigen Federn liegen. Bei der Schwingung 3. Ordnung tritt nur noch ein scheinbarer Knotenpunkt auf und bei der Schwingung 4. Ordnung treten sämtliche 4 Knotenpunkte sichtbar in die Erscheinung, d. h. die Massen mit den ungeraden Indizes schwingen nach der einen und die Massen mit den geraden Indizes nach der entgegengesetzten Seite.

3. Die Anordnung mit nach beiden Seiten frei schwingenden Massen.

Die Aordnung mit nach beiden Seiten frei schwingenden Massen hat für die Praxis besondere Wichtigkeit, da die Lösung dieser Aufgabe die Berechnung von Eigenschwingungszahlen von umlaufenden Wellen, die mit Massen behaftet sind, enthält.

Eine Anordnung mit 6 Massen ist in Abb. 8 wiedergegeben. Nach den vorausgehenden Ausführungen besteht die Aufgabe, die Eigenschwingungszahlen der Gesamtanordnung zu finden, darin, die Gesamtanordnung in einzeln schwingende Massen zu zergliedern oder die Beiwerte μ und λ, nach denen Massen und Längen unterteilt werden müssen, zu bestimmen.

Abb. 8

Da nach den früher gemachten Voraussetzungen keine äußeren Kräfte angreifen sollen, bleibt der Schwerpunkt der Gesamtanordnung bei den Schwingungen in Ruhe. Die Massen in Abb. 8 müssen deshalb auch bei der Schwingung 1. Ordnung zum Teil nach rechts und zum Teil nach links ausschlagen, oder bei der Schwingung 1. Ordnung tritt ein auf einer Feder liegender, also wirklicher Knotenpunkt auf. Hätten wir nur 2 Massen, die zwischen einer Feder schwingen, so wäre der Knotenpunkt der Schwingung

der Schwerpunkt, da für ihn $m_1 l_1 = m_2 l_2$ ist. Den 1. Annäherungswert, den wir dem Probierverfahren zugrunde legen, nehmen wir ebenfalls so an, daß der Knotenpunkt Q mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt. Rechts und links vom Knotenpunkt haben wir aber ein schwingendes System nach Abb. 7, für das wir unter Benutzung des Beiwertes $\nu = 0{,}9$ sowie der Schwerpunktsmasse m_s und Schwerpunktsfederlänge l_s den 1. Annäherungswert für die Schwingungszahl T_1 erhalten hatten zu $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}9\, m_s l_s}{c}}$. Die rechts von S gelegenen Massen in Abb. 8 haben ebenso wie die links gelegenen den Wert von $m_s l_s = 6{,}67$ unter Benutzung der in der Abbildung eingetragenen Zahlenwerte. Wir erhalten damit die Größe, die das Produkt ml für jede schwingende Einzelmasse haben muß, da sie alle gleiche Schwingungszahl T_1 haben, und können nun an die Auflösung der den Gleichungen (8) entsprechenden Gleichungen (9) gehen:

$$\begin{aligned} \nu m_s l_s &= \lambda_1 l_1 m_1 = (1-\lambda_1) l_1 \mu_2 m_2 = \lambda_2 l_2 (1-\mu_2) m_2 \\ &= (1-\lambda_2) l_2 \mu_3 m_3 = \lambda_3 l_3 (1-\mu_3) m_3 = (1-\lambda_3) l_3 \mu_4 m_4 = \lambda_4 l_4 (1-\mu_4) m_4 \\ &= (1-\lambda_4) l_4 \mu_5 m_5 = \lambda_5 l_5 (1-\mu_5) m_5 = (1-\lambda_5) l_5 m_6' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9). \end{aligned}$$

Zur Anordnung nach Abb. 8.

$$m_s l_s = \frac{20}{3} = 6{,}67.$$

Zahlentafel 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ν	$\nu l_s m_s = \lambda_1 m_1 l_1$	λ_1	μ_2	λ_2	μ_3	λ_3	μ_4	λ_4	μ_5	λ_5	m_6'	$\Delta m_s = m_6' - m_6$	Δl_s	$m_s' l_s'$	$\nu_{red} = \frac{\nu m_s l_s}{m_s' l_s'}$
0,9	6	+ 6	− 0,6	+ 1,876	−6 85	+0,7645	+12,75	−0,2554	+ 4,78	− 1,588	+ 2,340	0,340	0,088	7,06	0,850
0,850	5,665	+ 5,665	− 0,607	+ 1,763	−7,43	+0,672	+ 8,64	−0,3715	+ 4,13	− 1,810	+ 2,015	0,015	0,00375	6,68	0,849

Die Weiterbehandlung dieser Gleichungen liefert die strengen Lösungen für die Schwingungsdauern. Wir benutzen die Gleichungen zur Annäherung an den tatsächlichen Wert von T_1 und haben mit ihrer Hilfe Zahlentafel 2 ausgerechnet. Die Auswertung ist unter Benutzung des Beiwertes $\nu = 0{,}9$ in der ersten Zeile der Zahlentafel 2 durchgeführt. Wir erhalten nacheinander die Beiwerte λ und μ, nach denen Längen und Massen geteilt werden müssen, und schließlich in Spalte 12 den Wert, den m_6 haben müßte, damit die Schwingung von der Schwingungsdauer $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_s l_s}{c}}$ ohne äußeren Zwang zustande kommt. Für diese geänderte Anordnung mit der Masse m_6' statt m_6 läßt sich aber m_s' und l_s' und auch $m_s' l_s'$ in Spalte 15 angeben. Daraus kann aber wieder das ν_{red} (Spalte 16) berechnet werden, das der Aufstellung der Zahlenwerte der 1. Zeile zugrunde gelegen hat, wenn man berücksichtigt, daß der Wert von m_6' nicht 2, sondern 2,340 betragen hat. Wir nehmen nun an, daß der neu gewonnene Wert von ν nicht nur für die Gesamtanordnung mit der Masse m_6', sondern auch für die Anordnung nach Abb. 8 mit der Masse $m_6 = 2{,}0$ Gültigkeit habe und rechnen hierfür die 2. Zeile der Zahlentafel aus. Das alsdann erhaltene m_6'' weicht nur noch um 0,015 von dem tatsächlichen Wert 2,00 ab. Wenn man wieder das ν_{red} in Spalte 16 ausrechnet, kann man sicher sein, daß der schließlich erhaltene Wert von $\nu m_s l_s$ die Grundlage für die Berechnung von T_1 so genau abgibt, wie es die Ermittlung mittels Rechenschieber gestattet.

T_1 ist also für die durch Abb. 8 dargestellte Anordnung gleich $2\pi\sqrt{\frac{0{,}849\,\frac{20}{3}}{c}}$. Wenn man die Schwingungsdauer 1. Ordnung berechnet hat, hat man schon einen Anhalt für die Größe der Schwingungsdauer 2. Ordnung und damit für das λ_1', mit dem $m_1 l_1$ zu multiplizieren ist, um $\lambda_1' m_1 l_1$ zu liefern. Die weitere Annäherung kann man in gleicher Weise wie bei der Schwingung 1. Ordnung durchführen, wobei man die Unterteilung durch die beiden wirklichen Knotenpunkte zu berücksichtigen hat.

Die im vorstehenden entwickelte Methode, die Eigenschwingungszahlen von Wellen mit Schwungmassen und von geradlinig schwingenden Massenanordnungen mit Hilfe der fingierten Knotenpunkte zu untersuchen, läßt nicht nur eine rasche zahlenmäßige Aus-

rechnung der Schwingungszeiten zu, sondern sie gestattet auch einen tieferen Einblick in die Zusammenhänge der einzelnen Schwingungsvorgänge und in das Verhältnis der Schwingungsdauern zueinander. Die Anwendung der vorstehenden Ueberlegungen zur Berechnung der Schwingungsdauern von Maschinenwellen habe ich in einem Aufsatz, der demnächst in der »Schweizerischen Bauzeitung« erscheint, an einem praktischen Zahlenbeispiel durchgeführt. 55

Zur Synthese der ebenen Mechanismen.[1]

Von **H. ALT** in Dresden.

Die Synthese der Mechanismen hat das Ziel, Mechanismen bezüglich ihrer Bauart und der Abmessungen ihrer Glieder derart auszumitteln, daß sie bestimmte vorgeschriebene Bedingungen erfüllen. Eine systematische Behandlung der Getriebesynthese hat zunächst die Aufgabe zu lösen, diejenige zwangläufige kinematische Kette zu finden, die einem gesuchten Mechanismus, entsprechend den jeweils gestellten Bedingungen, zugrunde gelegt werden soll. Diese Grundaufgabe der Getriebesynthese wird bei den ebenen Gelenkmechanismen in der Weise gelöst, daß man auf Grund der von M. Grübler[2]) herrührenden Zwangläufigkeitsbedingungen die sämtlichen überhaupt möglichen zwangläufigen kinematischen Ketten für eine beliebige Gliederzahl aufstellt und dann eine für den vorliegenden Zweck geeignete Kette auswählt. Ist die kinematische Kette gewählt, die für den gesuchten Mechanismus benutzt werden soll, so sind noch die Abmessungen ihrer einzelnen Glieder zu ermitteln. Hieraus folgt als weitere wesentliche Aufgabe der Getriebesynthese, zu untersuchen, wie viele und welche Forderungen sich bei der Konstruktion von Mechanismen erfüllen lassen, und ferner, Methoden anzugeben, nach denen auf Grund der gestellten Forderungen die gesuchten Abmessungen der Glieder ermittelt werden können. Die Behandlung dieser Hauptaufgabe bildet den Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Als Ausgangspunkt dienen Untersuchungen Burmesters[3]), die dieser jedoch für einen anderen Zweck, nämlich für die Behandlung der angenäherten Geradführungen, angestellt hat. Diese Untersuchungen, deren Ergebnisse im ersten Abschnitt in der Hauptsache ohne Beweis vorgeführt werden, befassen sich mit den Beziehungen, die zwischen drei, vier und fünf endlich verschiedenen Lagen einer komplan bewegten Ebene bestehen, und insbesondere mit denjenigen Punkten, deren entsprechende Lagen auf einem Kreise liegen. Bei drei Lagen einer Ebene geht durch entsprechende Punkte stets ein Kreis, bei vier Lagen dagegen nur durch die Punkte, die auf bestimmten Kurven liegen, während man bei fünf Lagen einer Ebene nur vier solcher Kreispunkte erhält. Der zweite Abschnitt bringt eine Untersuchung über diejenigen Punkte bei drei Lagen einer Ebene, denen Kreise vom gleichen Radius entsprechen, wobei sich der geometrische Ort dieser Punkte als Koppelkurve ergibt. Im dritten Abschnitt, der zwei durch eine dritte Ebene gelenkig verbundene Ebenen behandelt, wird die Aufgabe erörtert, bei einer Anzahl beliebig gegebener Lagen zweier Ebenen in diesen die beiden Gelenkpunkte so zu bestimmen, daß ihre Entfernung in den gegebenen Lagen beider Ebenen die gleiche Größe hat und sie daher durch eine dritte Ebene starr verbunden werden können. Die Lösung dieser Aufgabe ist für zwei oder drei Lagen zweier Ebenen bereits durch M. Grübler[4]) angegeben worden; sie wird hier auch für vier und fünf Lagen entwickelt und zwar unter Benutzung des Gedankens der Relativbewegung in der Weise, daß die Relativlagen der einen Ebene gegen die andere Ebene untersucht und auf sie die Ergebnisse der beiden ersten Abschnitte angewendet werden. Hierbei wird gezeigt, wie man allgemein eine Anzahl der wichtigsten bei der Getriebesynthese auftretenden Forderungen erfüllen kann. Als Sonderfälle werden im vierten Abschnitt das allgemeine Gelenkviereck und daran anschließend das Schubkurbelgetriebe wegen ihrer praktischen Bedeutung ausführlich be-

[1]) Auszug aus einer von der Technischen Hochschule Dresden genehmigten Habilitationsschrift.

[2]) M. Grübler, Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten, Civilingenieur 1883, S. 167 bis 200, und Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen 1885, S. 179 bis 223.

[3]) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 599 u. f.

[4]) M. Grübler, Getriebelehre, Berlin 1917, S. 107 u. f.

handelt. Eine Untersuchung über die Forderung bestimmter Geschwindigkeiten bildet den Inhalt des fünften Abschnittes, der sich mit dem Fall befaßt, daß bei zwei durch eine dritte Ebene gelenkig verbundenen Ebenen die Winkelgeschwindigkeiten beider Ebenen in ein oder in zwei Lagen ein vorgeschriebenes Verhältnis haben sollen, wobei die entsprechenden Momentanpole als gegeben anzunehmen sind. Die hier abgeleiteten allgemeinen Verfahren werden im sechsten Abschnitt verwertet, der die Forderung behandelt, daß ein oder zwei gegebene Lagen der einen Ebene Totlagen sein sollen. Die in den ersten sechs Abschnitten gewonnenen Ergebnisse, aus denen überall zeichnerische Verfahren entwickelt werden, um die praktische Anwendung zu erleichtern, werden im siebenten und achten Abschnitt bei der Untersuchung der Dampfmaschinenumsteuerung von Heusinger und bei der einer Wälzhebelsteuerung angewendet. Dabei wird der Hauptwert darauf gelegt, an einer Reihe von typischen Fragestellungen der praktischen Getriebesynthese die Brauchbarkeit der vorgeführten Methoden, die Art ihrer Handhabung und ihre vielseitige Verwendbarkeit zu zeigen.

1. Die Kreise durch entsprechende Punkte bei drei, vier und fünf Lagen einer Ebene. Sind zwei Lagen P_1 und P_2 einer Ebene P gegeben, etwa durch je zwei entsprechende Punkte A_1, B_1 bezw. A_2, B_2, so kann man die Bewegung, durch die P von P_1 nach P_2 gelangt, durch die Drehung um einen bestimmten Punkt P^{12} ersetzt denken, den man den Pol der Ebenen P_1 und P_2 nennt und der als Schnittpunkt der Mittellote von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gefunden wird. Dieser Pol ist zugleich selbstentsprechender Punkt der beiden Ebenen P_1 und P_2.

Betrachtet man drei Lagen P_1, P_2, P_3 einer Ebene P, so lassen sich diesen drei verschiedene Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} zuordnen, deren Bedeutung aus den beigefügten Marken ersichtlich ist. Diese Pole bilden ein Dreieck, dessen Winkel halb so groß sind wie die entsprechenden Drehwinkel; z. B. ist der Poldreieckwinkel α_{12} bei P^{12} (Abb. 1) gleich der Hälfte des Drehwinkels der Ebenen P_1 und P_2. Zu einem beliebig gegebenen Punkte A_1 der Ebene P_1 findet man die entsprechenden Punkte A_2 und A_3 in den Ebenen P_2 und P_3, indem man um P^{12} mit $P^{12} A_1$ den Kreis mit dem Zentriwinkel $2\,\alpha_{12}$ bezw. um P^{13} mit $P^{13} A_1$ den Kreis mit dem Zentriwinkel $2\,\alpha_{13}$ schlägt. Die von A_1 auf $P^{12} P^{13}$, von A_2 auf $P^{12} P^{23}$, von A_3 auf $P^{13} P^{23}$ gefällten Lote schneiden sich in einem Punkte A_{123}, der der Grundpunkt des Punktes A bezüglich der drei Ebenen P_1, P_2, P_3 genannt werden möge. Durch die drei homologen Punkte A_1, A_2, A_3 läßt sich stets ein Kreis legen, dessen Mittelpunkt $\mathbf{A}_{123}$ mit dem Grundpunkt A_{123} in der Beziehung steht, daß die Verbindungslinien beider Punkte mit den drei Polen in jedem Pol gleiche Winkel mit den Seiten des Poldreiecks einschließen. In Abb. 1 ist in jedem Pol ein Paar gleicher Winkel durch Kreisbögen bezeichnet.

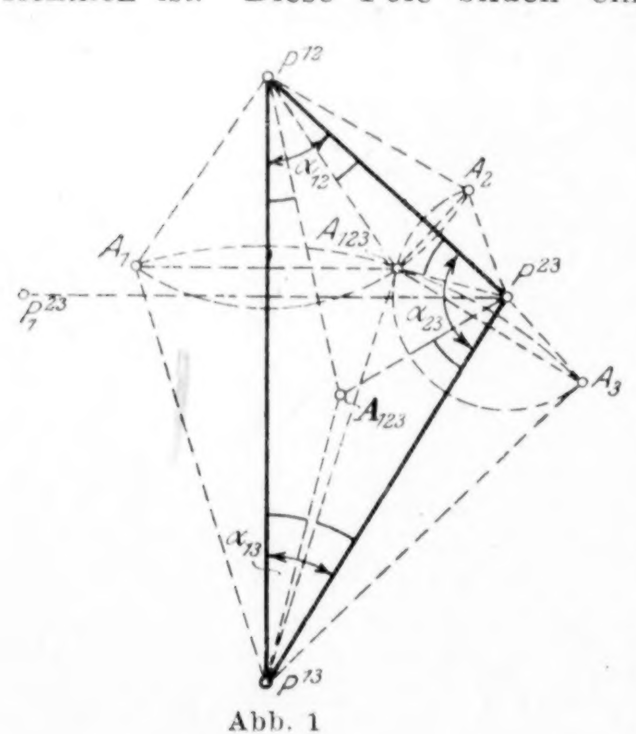


Abb. 1

Diese Eigenschaft liefert eine Konstruktion für den Kreismittelpunkt $\mathbf{A}_{123}$, wenn z. B. der Punkt A_1 bezw. sein Grundpunkt A_{123} gegeben ist, oder umgekehrt für den Punkt A_1 bezw. A_{123}, wenn $\mathbf{A}_{123}$ gegeben ist. Man findet, daß jedem Punkte A_1 eindeutig ein Mittelpunkt $\mathbf{A}_{123}$ zugeordnet ist und umgekehrt. Zwischen den Punkten A_1 und $\mathbf{A}_{123}$ besteht eine quadratische Verwandtschaft, bei der einer Geraden im System der Punkte A_1 ein durch die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} gehender Kegelschnitt im System der zugeordneten Mittelpunkte $\mathbf{A}_{123}$ entspricht. Eine besondere Stellung nehmen hierbei die Pole selbst ein. Jedem der drei Pole, aufgefaßt als Punkte des Mittelpunktsystems, entspricht nicht ein einzelner Punkt A_1, sondern es entsprechen ihm sämtliche Punkte der gegenüberliegenden Polgeraden. Betrachtet man z. B. P^{23} als Grundpunkt, so fällt dieser mit den zugehörigen homologen Punkten der Ebenen P_2 und P_3 zusammen. Den dritten homologen Punkt $P_1{}^{23}$ in der Ebene P_1 findet man, indem man von P^{23} auf $P^{12} P^{13}$ das Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Entsprechend findet man zu den andern Polen P^{12} und P^{13} die Punkte $P_3{}^{12}$ bezw. $P_2{}^{13}$ in den Ebenen P_3 bezw. P_2.

Nimmt man zu den bisher behandelten drei Ebenen P_1, P_2, P_3 noch eine vierte P_4 hinzu, so ergeben sich insgesamt sechs Pole P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14}, P^{24}, P^{34}, die jedoch nicht

mehr unabhängig voneinander sind, sondern für die der folgende von Burmester gefundene Satz gilt: Die beiden durch einen Pol gehenden Geradenpaare, die sich auf je zwei Pole stützen, deren Marken gleiche Ziffern enthalten, bilden gleiche Winkel (Abb. 2). Z. B. ist $\sphericalangle P^{14} P^{12} P^{24} = \sphericalangle P^{13} P^{12} P^{23}$. In Abb. 2 sind in jedem Pol zwei gleiche Winkel durch Kreisbögen mit Pfeilen angegeben, ferner für einen beliebigen Punkt A seine homologen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 mit den zugehörigen Grundpunkten A_{123}, A_{124}, A_{134}, A_{234}. Von den sechs Polen nennt man je zwei, deren Marken keine gleichen Ziffern aufweisen, also P^{12}, P^{34} bezw. P^{13}, P^{24} bezw. P^{23}, P^{14}. Gegenpole. Nimmt man zwei Paar Gegenpole, z. B. P^{12}, P^{34} und P^{13}, P^{24}, als gegeben an, so liegen die beiden andern Pole auf einer zirkularen Kurve dritten Grades, die Burmester die Pollagenkurve nennt und die sich wie folgt ermitteln läßt. Durch die gegebenen zwei Paare von Gegenpolen ist ein Vierseit bestimmt, dessen zwei weitere Eckpunkte mit Π^{14} bezw. Π^{23} bezeichnet seien (Abb. 3). Die drei Diagonalen $P^{12} P^{34}$, $P^{13} P^{24}$, $\Pi^{14} \Pi^{23}$ des Vierseits werden durch eine Gerade ζ halbiert. Die Umkreise der vier Dreiecke, die durch das Vierseit gebildet werden, schneiden sich in einem Punkte Γ, den man daher als Schnittpunkt zweier dieser vier Kreise finden kann. Zieht man durch Γ die Verbindungslinien mit zwei der sechs Ecken des Vierseits, etwa mit P^{12} und P^{13}, wobei sich auf der Geraden ζ die Schnittpunkte M^{12} bezw. M^{13} ergeben, und schlägt um M^{12} den Kreis durch P^{12} und um M^{13} den Kreis durch P^{13}, so bestimmen diese beiden Kreise ein Kreisbüschel mit der Mittellinie ζ. Zieht man nun durch Γ eine beliebige Gerade g, die ζ in M schneidet, und schlägt um M den Kreis, der dem eben definierten Büschel angehört, so schneidet dieser die Gerade g in zwei Punkten P' und P'' der Pollagenkurve, die hiernach punktweise bestimmt werden kann. Die Gerade ζ nennt man die Mittellinie und den Punkt Γ den Hauptbrennpunkt der Pollagenkurve. Wenn also zwei Paare von Gegenpolen gegeben sind, so zeichnet man die Pollagenkurve, auf der man den fünften Pol beliebig wählen kann, während der sechste Pol dann auf ihr zufolge der oben angegebenen Winkelbeziehungen eindeutig bestimmt ist.

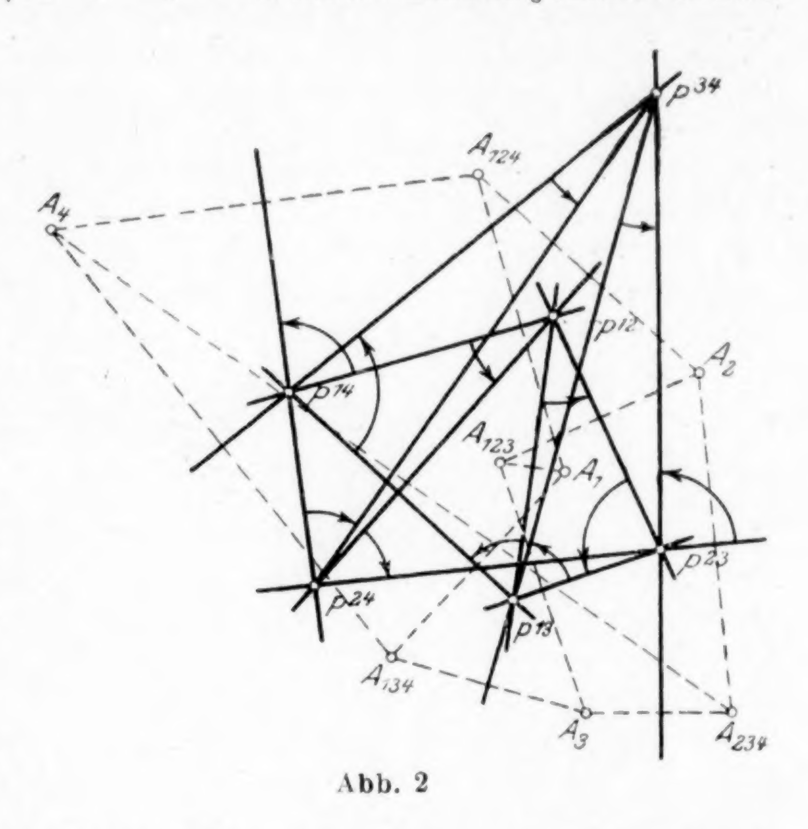


Abb. 2

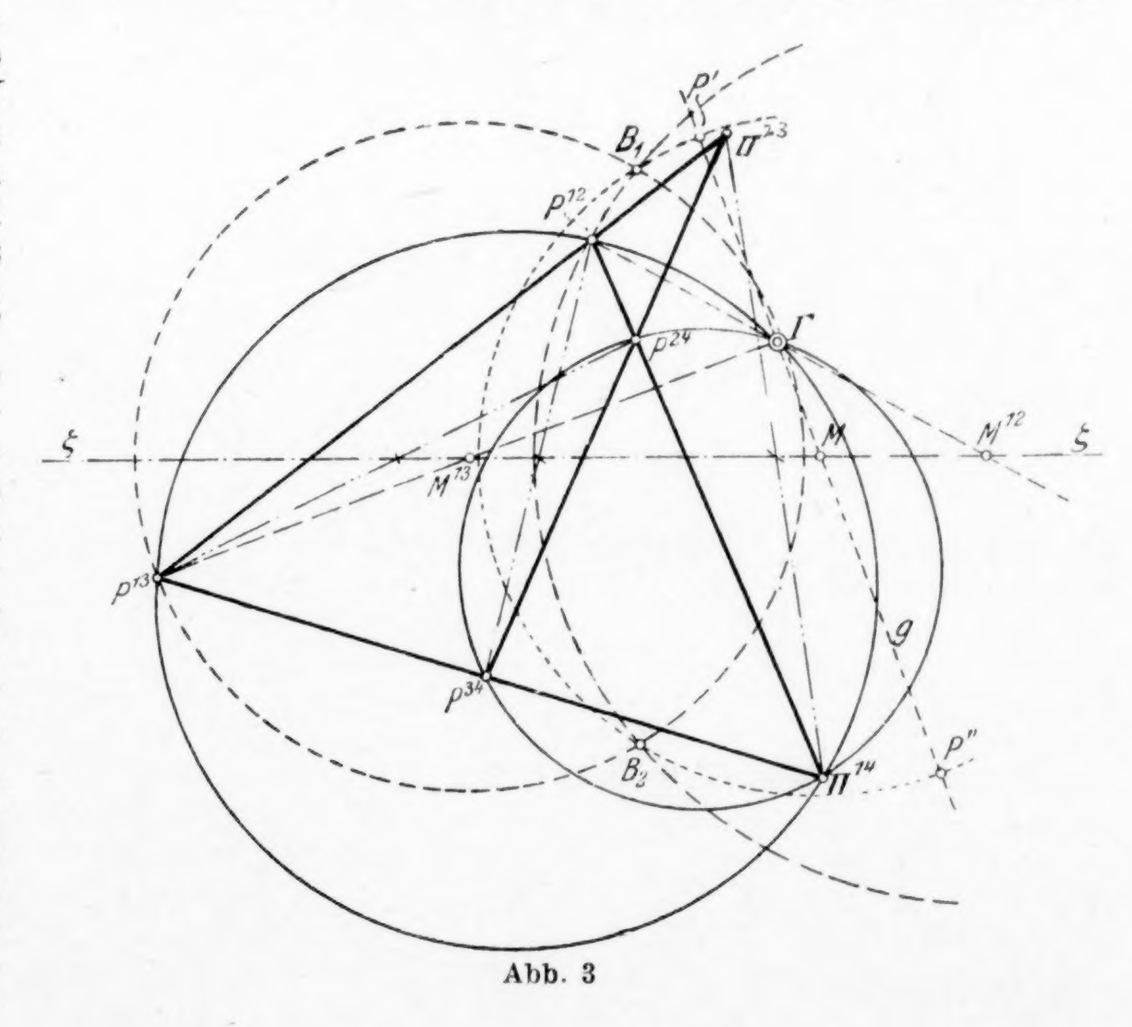


Abb. 3

Bei drei Lagen einer Ebene liegen je drei homologe Punkte A_1, A_2, A_3 stets auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt $\mathbf{A}_{123}$ eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt kann jedem Punkte $\mathbf{A}_{123}$ eine und nur eine Gruppe von drei homologen Punkten A_1, A_2, A_3 zugeordnet

werden. Bei **vier Lagen** einer Ebene werden im allgemeinen vier homologe Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 nicht mehr auf einem Kreise liegen, es wird aber Gruppen von je vier homologen Punkten geben, durch die sich ein Kreis legen läßt. Den geometrischen Ort der Mittelpunkte dieser Kreise durch vier homologe Punkte nennt **Burmester** die **Mittelpunktkurve** und den geometrischen Ort der entsprechenden Punkte A_1 in der Ebene P_1 die **Kreispunktkurve**. Man erkennt, daß die Kreispunktkurven in den Ebenen P_1, P_2, P_3, P_4, d. h. die geometrischen Oerter der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, kongruent sind. Wie **Burmester** gezeigt hat, ist die Mittelpunktkurve mit der oben definierten Pollagenkurve für die Pole P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14}, P^{24}, P^{34} und die Kreispunktkurve der Ebene P_1 mit der Pollagenkurve für die Pole P^{12}, P^{13}, P_1^{23}, P^{14}, P_1^{24}, P_1^{34} identisch, wobei z. B. P_1^{34} der zu P^{34} bezüglich der Geraden $P^{13}P^{14}$ symmetrisch liegende Punkt ist. Entsprechend findet man die Kreispunktkurven in den Ebenen P_2, P_3, P_4.

Bei **fünf Lagen** P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 einer Ebene P ergeben sich die zehn Pole P^{12}, P^{13}, usf. Zeichnet man zwei Mittelpunktkurven, etwa für die Ebenen P_1, P_2, P_3, P_4 und P_1, P_2, P_3, P_5, so haben die Schnittpunkte beider Kurven die Eigenschaft, Mittelpunkte von Kreisen zu sein, die durch je fünf entsprechende Punkte der vorgelegten Ebenen gehen. Was die Zahl der Schnittpunkte anbelangt, so ergibt sich folgendes. Als Kurven dritter Ordnung haben sie neun Punkte gemeinsam. Zu diesen gehören im vorliegenden Falle die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23}, die wegen ihrer oben erwähnten Sonderstellung als Mittelpunkte von Kreisen durch homologe Punkte hier nicht in Betracht kommen, und ferner die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte, durch die alle Mittelpunktkurven gehen. Von den neun Schnittpunkten sind also fünf in Abzug zu bringen, so daß sich der **Burmester**sche Satz ergibt: **Bei fünf Lagen einer Ebene gibt es im allgemeinen vier Gruppen von je fünf homologen Punkten, die auf je einem Kreise liegen. Von den vier Kreismittelpunkten können alle reell, zwei reell und zwei imaginär oder alle imaginär sein.** Durch diese vier Kreismittelpunkte, die man die **Burmesterschen Punkte** nennt und die als Schnittpunkte der Mittelpunktkurven für die Ebenen P_1, P_2, P_3, P_4 und P_1, P_2, P_3, P_5 gefunden wurden, gehen auch die drei übrigen Mittelpunktkurven der fünf gegebenen Ebenen, so daß man die vier **Burmester**sche Punkte als Schnittpunkte zweier beliebiger

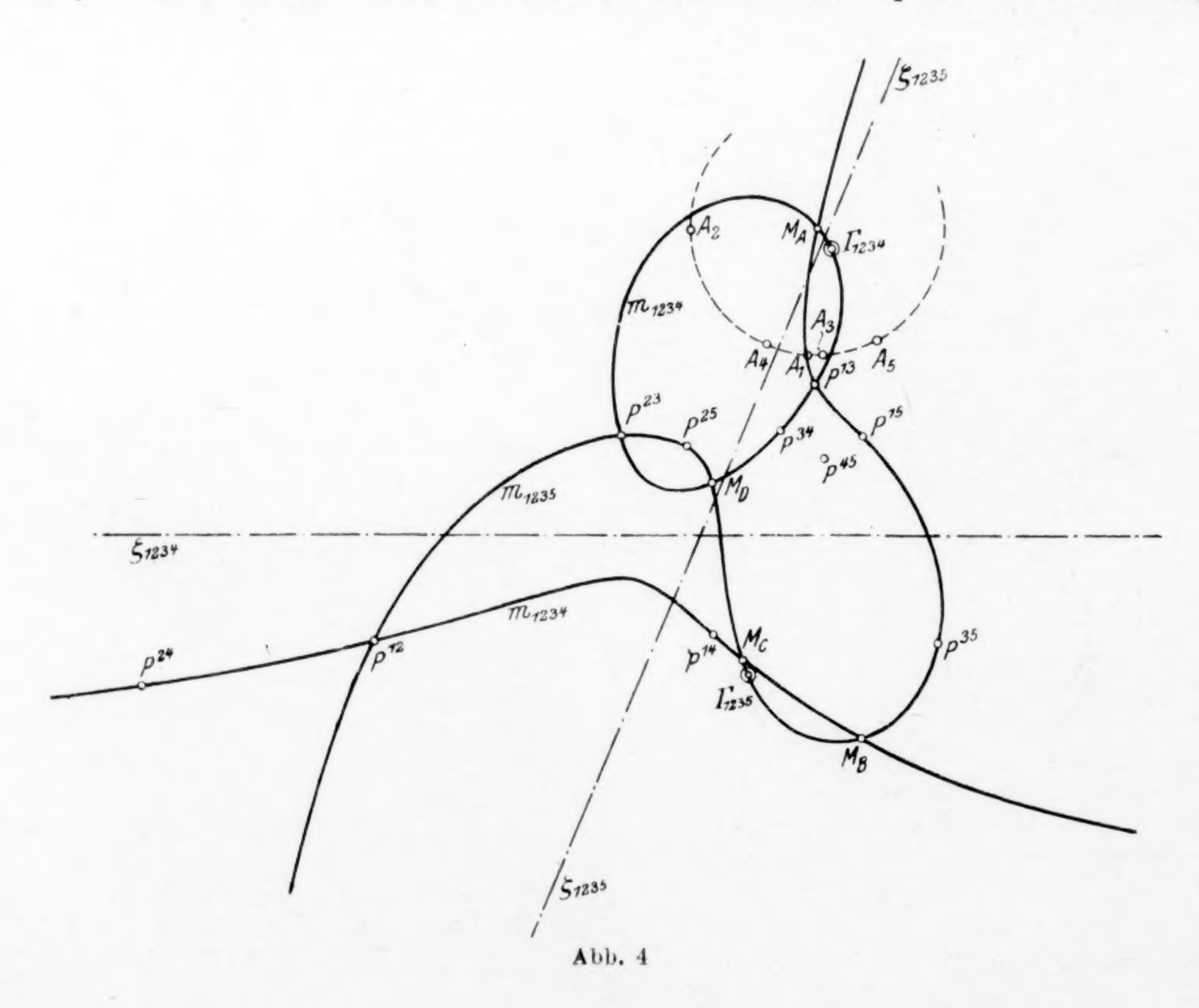


Abb. 4

der fünf möglichen Mittelpunktkurven finden kann. In Abb. 4 sind die zehn Pole für fünf Ebenen und zwei Mittelpunktkurven m_{1234} und m_{1235} eingezeichnet. Man findet hier die vier reellen Burmesterschen Punkte M_A, M_B, M_C, M_D. Für M_A sind die zugeordneten fünf homologen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, die auf einem Kreise um M_A liegen, angegeben.

Wenn mehr als fünf Lagen einer Ebene gegeben sind, so gibt es im allgemeinen keine Punkte dieser Ebene, deren homologe Lagen sämtlich auf einem Kreise liegen.

2. Kreisbahnen von vorgeschriebenem Radius. Wenn drei Lagen P_1, P_2, P_3 einer Ebene P vorgelegt sind, so läßt sich zu jedem Punkte A der Ebene P der Mittelpunkt M_A des Kreises durch die drei Lagen A_1, A_2, A_3 des Punktes A bestimmen. Es soll nun untersucht werden, wo diejenigen Mittelpunkte M_A liegen, denen Kreise von festem Radius entsprechen.

Gegeben seien die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23}, ein beliebiger Punkt A_1 der Ebene P_1 und der zugeordnete Kreismittelpunkt M_A (Abb. 5). Die Strecke $A_1 M_A$ ist dann der Radius r des zu M_A gehörigen Kreises. Es sei ferner

Abb. 5

$$M_A P^{12} = e_{12}, \quad M_A P^{13} = e_{13}, \quad M_A P^{23} = e_{23}.$$

Die Gerade $P^{12} M_A$ möge den Umkreis des Poldreiecks in C schneiden und es sei $M_A C = u$. Bezeichnet man die Winkel des Poldreiecks entsprechend mit $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$, so findet man

$$\sphericalangle\, P^{12} C P^{23} = \sphericalangle\, P^{12} P^{13} P^{23} = \alpha_{13}$$

als Peripheriewinkel über der gleichen Sehne. Da ferner gemäß der oben angegebenen Konstruktion des Punktes M_A

$$\sphericalangle\, P^{12} P^{13} A_1 = \sphericalangle\, P^{23} P^{13} M_A$$

ist, so folgt

$$\sphericalangle\, M_A P^{13} A_1 = \sphericalangle\, P^{23} P^{13} P^{12} = \alpha_{13}.$$

Es läßt sich nun in einfacher Weise zeigen, daß vom Punkte M_A aus je zwei der vier Punkte P^{12}, P^{13}, P^{23}, A_1 unter dem gleichen Winkel erscheinen. Hiernach ist im vorliegenden Falle

$$\sphericalangle\, A_1 M_A P^{13} = \sphericalangle\, P^{23} M_A C = \lambda.$$

Da somit die beiden Dreiecke $M_A A_1 P^{13}$ und $M_A P^{23} C$ in zwei Winkeln übereinstimmen und daher ähnlich sind, so gilt die Beziehung

$$r : e_{13} = e_{23} : u.$$

Bezeichnet man mit $p^2 = e_{12} u$ die Potenz des Punktes M_A in bezug auf den Kreis durch die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23}, so findet man

$$e_{12} e_{13} e_{23} = r p^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Wenn r einen bestimmten gegebenen Wert besitzt, so stellt die Gleichung (1) den geometrischen Ort aller Punkte M_A dar, zu denen Kreise vom gegebenen Radius r gehören. Um die Art dieses geometrischen Ortes zu untersuchen, den wir die R_M-Kurve nennen wollen, führen wir rechtwinklige Koordinaten ein mit P^{23} als Ursprung und der Geraden $P^{23} P^{13}$ als x-Achse (Abb. 5). Bezeichnet man die Seiten des Poldreiecks mit $P^{12} P^{13} = a_1$, $P^{12} P^{23} = a_2$, $P^{13} P^{23} = a_3$, so hat der Mittelpunkt M_0 des Kreises durch P^{12}, P^{13}, P^{23} die Koordinaten

$$x_0 = {}^1/_2\, a_3, \qquad y_0 = {}^1/_2\, a_3 \cot \alpha_{12}$$

und der Pol P^{12}

$$x_{12} = a_2 \cos \alpha_{23}, \qquad y_{12} = a_2 \sin \alpha_{23}.$$

Die Koordinaten der beiden anderen Pole sind $x_{23} = y_{23} = 0$ bezw. $x_{13} = a_3$, $y_{13} = 0$. Wenn man die Koordinaten des beliebigen Punktes M_A mit x, y bezeichnet, so läßt sich nunmehr die Gleichung (1) in der Form schreiben:

$$(x^2 + y^2)[(x-a)^2 + y^2][(x - a_2 \cos\alpha_{23})^2 + (y - a_2 \sin\alpha_{23})^2]$$
$$= r^2[x^2 + y^2 - a_3 x - a_3 y \cot\alpha_{12}]^2 \quad . \quad (2).$$

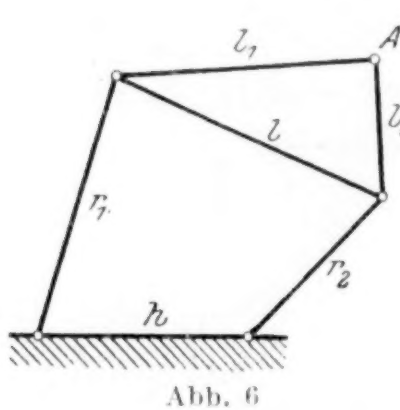


Abb. 6

Man ersieht aus Gl. (2), daß die R_M-Kurve eine trizirkulare (d. h. dreimal durch die beiden zyklischen Punkte der Ebene gehende) Kurve sechsten Grades ist, welche die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} als Doppelpunkte besitzt. Da unter den trizirkularen Kurven sechsten Grades die Koppelkurven ebenfalls drei Doppelpunkte aufweisen, so liegt die Annahme nahe, daß die R_M-Kurve zur Gruppe der Koppelkurven gehört. Stellt man die Gleichung der Koppelkurve für einen beliebigen Koppelpunkt A eines allgemeinen Gelenkvierecks mit den Bezeichnungen der Abbildung 6 auf, so findet man, daß die erhaltene Gleichung mit der Kurvengleichung (2) identisch ist, wenn man P^{23} und P^{13} als Festpunkte des Gelenkvierecks wählt und

$$h = a_3, \qquad l = r\,\frac{a_3}{2\,a_2 \sin\alpha_{23}}$$
$$l_1 = r_1 = \frac{r}{2\sin\alpha_{23}}, \qquad l_2 = r_2 = r\,\frac{a_1}{2\,a_2 \sin\alpha_{23}}$$

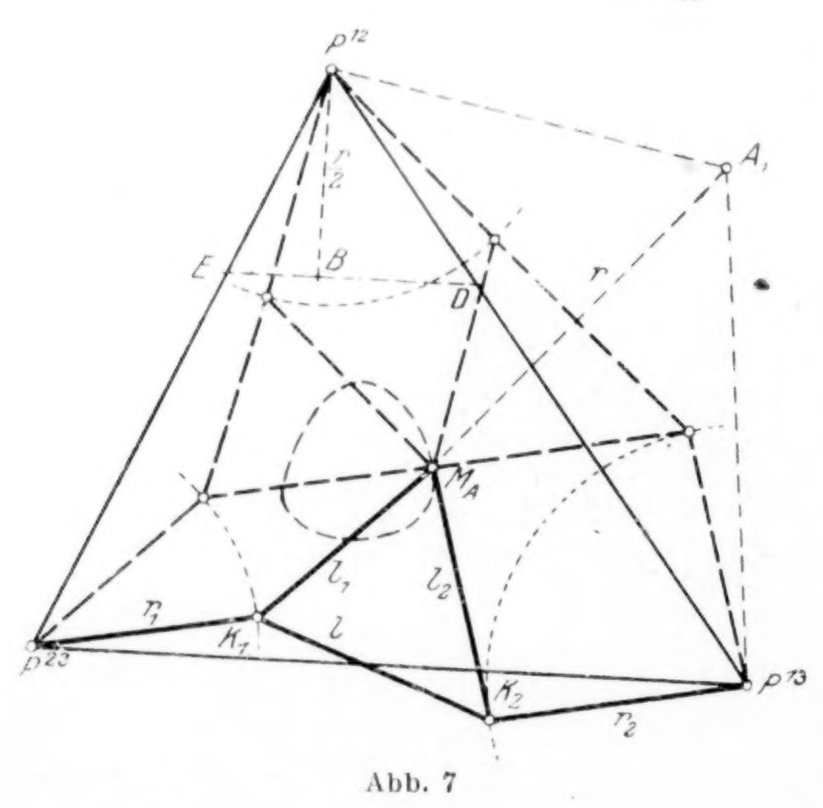


Abb. 7

setzt. Diese Strecken lassen sich, wie man sofort erkennt, sehr einfach zeichnerisch ermitteln, wenn das Poldreieck $P^{12}P^{13}P^{23}$ und der Radius r gegeben sind (Abb. 7). Man zieht durch P^{12} die Höhe des Poldreiecks, trägt auf dieser die Strecke $P^{12}B = {}^1/_2 r$ auf und zieht durch B zu $P^{13}P^{23}$ die Parallele, die $P^{12}P^{23}$ in E und $P^{12}P^{13}$ in D schneidet. Dann ist $P^{12}E = l_1 = r_1$, $P^{12}D = l_2 = r_2$, $DE = l$. Wir finden also das Ergebnis: **Die R_M-Kurven dreier Lagen einer Ebene sind spezielle Koppelkurven.** In jedem Punkte der Koppelkurve geht die Kurvennormale durch den Schnittpunkt der beiden Kurbelgeraden des Gelenkvierecks, so daß sich in allen Punkten die Kurventangenten leicht angeben lassen. Daher kann man die Kurve schon durch eine geringe Zahl von Punkten hinreichend genau bestimmen.

Da sich nach dem Satze von Roberts[1]) jede Koppelkurve durch drei verschiedene Gelenkvierecke erzeugen läßt und im vorliegenden Falle die drei Punkte P^{12}, P^{13}, P^{23} dem Punkte M_A gleichartig zugeordnet sind, so folgt, daß das oben angegebene Gelenkviereck mit dem Steg $P^{23}P^{13} = a_3$ ersetzt werden kann durch ein solches mit dem Steg $P^{23}P^{12} = a_2$ oder eins mit dem Steg $P^{12}P^{13} = a_1$, wobei die Bestimmungsstücke der Gelenkvierecke ähnlich, wie oben angegeben ist, zu konstruieren sind. Hierbei ergibt sich, daß in jedem der drei Punkte P^{12}, P^{13}, P^{23} die beiden Kurbeln gleich lang sind und symmetrisch zur Verbindungslinie mit M_A liegen. In Abb. 7 sind die drei Gelenkvierecke eingezeichnet, bei denen der gemeinsame Koppelpunkt M_A für den gegebenen Wert von r die ebenfalls eingezeichnete R_M-Kurve beschreibt. Das Gelenkviereck $P^{23}P^{13}K_1K_2M_A$ mit dem Steg $P^{23}P^{13}$ ist hierbei ausgezogen, während die beiden anderen Gelenkvierecke gestrichelt sind.

Untersucht man die R_M-Kurven für verschiedene Werte von r, so tritt die Frage auf, innerhalb welcher Grenzen die Größe des Radius r gewählt werden darf. Es ist unmittelbar einzusehen, daß es eine obere Grenze für r nicht gibt, da stets Punkte vor-

[1]) Roberts, Three-bar Motion in the Plane Space, Proceedings of the London Mathematical Society, VII 1875, S. 14.

handen sind, für die r unendlich groß wird, für die also drei homologe Punkte auf einer Geraden liegen. Die Beantwortung der Frage, welchen kleinsten Wert r annehmen kann, ergibt sich durch folgende Ueberlegung. Wir hatten gefunden, daß die R_M-Kurven Koppelkurven sind, die durch Gelenkvierecke erzeugt werden, deren Steg eine der Seiten des Dreieckes $P^{12}P^{13}P^{23}$ ist und deren übrige Abmessungen dem gegebenen Radius r proportional sind. Hieraus folgt, daß man den kleinsten möglichen Radius erhält, wenn man ein Gelenkviereck von möglichst kleinen Abmessungen benutzt. Betrachtet man (Abb. 8) die Seite $P^{13}P^{23} = a_3$ als Steg des Gelenkvierecks, so ergeben sich für dieses die kleinsten Abmessungen, wenn man mit den früheren Bezeichnungen $r_1 + r_2 + l = a_3$ setzt. Da hier $l_1 = r_1$ und $l_2 = r_2$ und das Koppeldreieck $K_1 M_A K_2$ dem Poldreieck $P^{23}P^{12}P^{13}$ ähnlich ist, so ist in diesem Falle, in dem das Gelenkviereck in Ruhe bleibt und die Koppelkurve daher zu einem Punkte zusammenschrumpft, dieser Punkt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Poldreiecks. Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man die Dreieckseite $P^{12}P^{13}$ bezw. $P^{23}P^{12}$ als Steg betrachtet. Damit ist der Satz gefunden: Bei drei Lagen einer Ebene gibt es immer einen und nur einen kleinsten Kreis durch drei entsprechende Punkte. Dieser kleinste Kreis hat als Mittelpunkt den Mittelpunkt des Inkreises des Poldreieckes und ist doppelt so groß wie dieser.

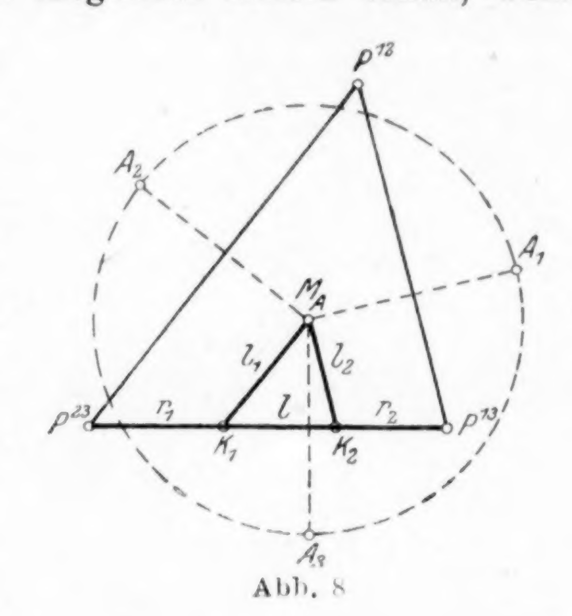


Abb. 8

Der geometrische Ort aller Punkte A_1 der Ebene P_1, die mit ihren homologen Punkten A_2 und A_3 auf Kreisen von gleichem Radius r liegen, soll R_1-Kurve genannt werden. Die entsprechenden geometrischen Oerter R_2, R_3 für die Punkte A_2 bezw. A_3 sind der R_1-Kurve kongruent. Um die R_1-Kurve zu ermitteln, soll zunächst gezeigt werden, daß diejenigen beiden Kreise gleichen Radius haben, die um einen beliebigen Punkt M_A und den zugeordneten Grundpunkt A_{123} geschlagen werden, wobei der Kreis um M_A durch die von A_{123} abgeleiteten homologen Punkte geht und umgekehrt. Vorgelegt seien die Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} und der dem letzteren in P_1 entsprechende Punkt P_1^{23} (Abb. 9). Ferner sei ein beliebiger Punkt A_{123} und der zugeordnete Mittelpunkt M_A gegeben, und es seien A_1, A_2, A_3 die von A_{123} als Grundpunkt und M_1, M_2, M_3 die von M_A als Grundpunkt abgeleiteten homologen Punkte. Dann liegen A_1, A_2, A_3 auf einem Kreise um M_A und M_1, M_2, M_3 auf einem Kreise um A_{123}. Da die vier Punkte M_1, A_1, A_{123}, M_A ein gleichschenkliges Trapez bilden, so sind dessen Diagonalen $M_A A_1$ und $A_{123} M_1$ einander gleich. Ebenso findet man $M_A A_2 = A_{123} M_2$ und $M_A A_3 = A_{123} M_3$. Damit ist der Beweis erbracht, daß die um M_A und A_{123} geschlagenen Kreise durch je drei homologe Punkte gleichen Radius haben, und daß infolgedessen die R_M-Kurve durch einen Punkt M_A immer durch den zugeordneten Punkt A_{123} geht. Da nun A_{123} bezüglich der Geraden $P^{12}P^{13}$ symmetrisch zu A_1 liegt, so folgt, daß auch die R_1-Kurve symmetrisch zur R_M-Kurve bezüglich $P^{12}P^{13}$ gelegen ist. Wir finden somit, daß die R_1-Kurve ebenfalls eine Koppelkurve ist, die sich von dem Dreieck $P^{12}P^{13}P_1^{23}$ in derselben Weise ableitet wie die R_M-Kurve vom Poldreieck $P^{12}P^{13}P^{23}$. Das Entsprechende gilt für die R_2- und die R_3-Kurve.

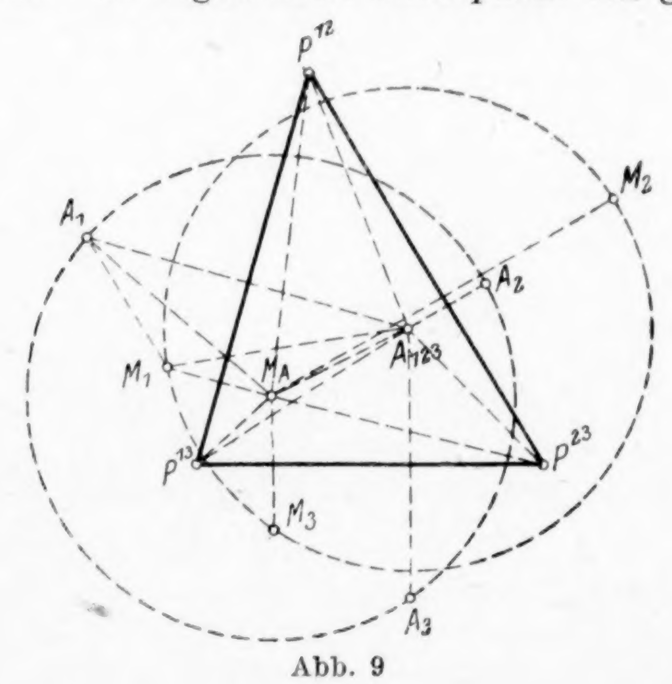


Abb. 9

Es tritt nun die Frage auf, ob man bei vier Lagen einer Ebene Gruppen von vier homologen Punkten ermitteln kann, die auf je einem Kreise von vorgeschriebenem Radius r liegen. Nimmt man die sechs Pole der vier Ebenen als gegeben an, so läßt sich für jedes der vier hierdurch bestimmten Poldreiecke zu dem gegebenen Werte von r die R_M Kurve ermitteln. Je zwei dieser Kurven, z. B. für die Ebenen P_1, P_2, P_3 bezw. P_1, P_2, P_4, schneiden sich in Punkten, welche die gewünschte Eigenschaft besitzen.

Hieraus folgt, daß alle vier R_M-Kurven, die sich zu den sechs Polen für das gegebene r zeichnen lassen, durch die gesuchten Punkte gehen. Außerdem haben je zwei R_M-Kurven einen der sechs Pole als Doppelpunkt und ferner die beiden zyklischen Punkte der Ebene als dreifache Punkte gemeinsam. Es ist unmittelbar einzusehen, daß die sämtlichen Punkte, welche die vier R_M-Kurven gemeinsam haben, auf der Mittelpunktkurve der vier Ebenen liegen müssen, die hiernach auch der geometrische Ort aller Schnittpunkte von je vier R_M-Kurven für alle Werte von r ist. Um bei vier Lagen einer Ebene die Mittelpunkte von Kreisen mit gleichem vorgeschriebenen Radius r durch je vier homologe Punkte zu finden, zeichnet man am zweckmäßigsten zunächst die Mittelpunktkurve und dann für drei der vier Lagen zum gegebenen Werte r die R_M-Kurve. Beide Kurven schneiden sich in den gesuchten Punkten. Die Zahl der Schnittpunkte ergibt sich durch folgende Ueberlegung. Da die R_M-Kurve eine trizirkulare Kurve sechsten Grades und die Mittelpunktkurve eine zirkulare Kurve dritten Grades ist, so haben beide 18 Punkte gemeinsam, von denen sechs in die beiden zyklischen Punkte der Ebene fallen. Da die Mittelpunktkurve ferner durch die allen R_M-Kurven gemeinsamen drei Doppelpunkte geht, so sind weitere sechs Punkte in Abzug zu bringen, so daß man sechs Punkte der verlangten Art erhält. Für die Ebenen P_1, P_2, P_3, P_4 ergeben sich die entsprechenden Konstruktionen, wenn man z. B. in der Ebene P_1 an Stelle der R_M-Kurve die R_1-Kurve und statt der Mittelpunktkurve die Kreispunktkurve benutzt. Damit ist der für die Anwendungen wichtige Satz gefunden: **Bei vier Lagen einer Ebene gibt es im allgemeinen sechs Gruppen von je vier homologen Punkten, die auf je einem Kreise von vorgeschriebenem Radius r liegen.** Von den sechs Schnittpunkten können sechs reell, vier reell und zwei imaginär, zwei reell und vier imaginär oder sechs imaginär sein. In Abb. 10 sind für einen bestimmten Wert von r die R_M-Kurven für das System der Ebenen P_1, P_2, P_3 (gestrichelt) und für das der Ebenen P_1, P_2, P_4 (ausgezogen) angegeben. Von den sechs in Betracht kommenden Schnittpunkten beider Kurven sind hier vier reell: M_A, M_B, M_C, M_D.

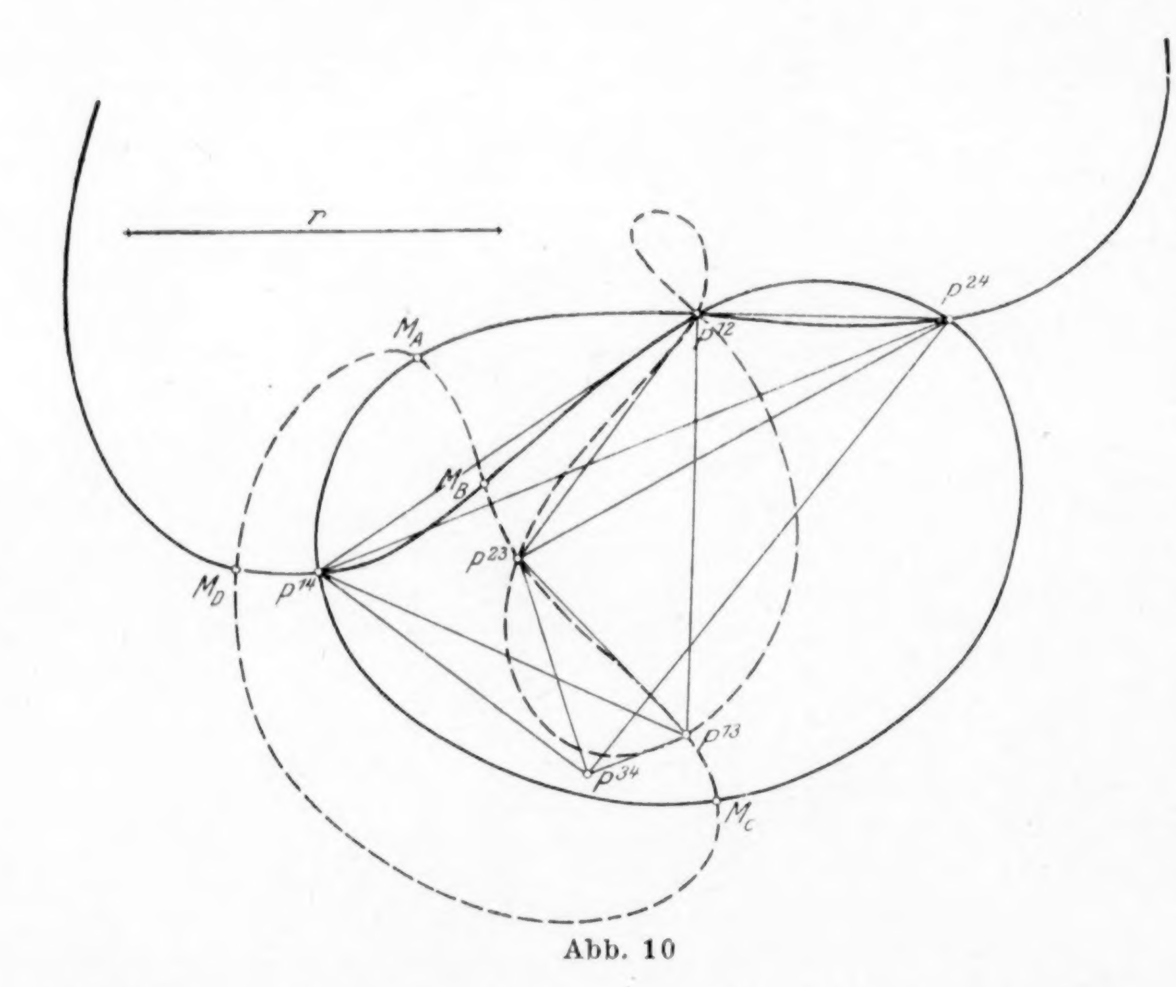


Abb. 10

3. Die Ermittlung der Gelenkpunkte bei zwei durch eine dritte Ebene gelenkig verbundenen Ebenen. Von drei Ebenen P, Q und S, die sich komplan in derselben ruhenden Ebene bewegen, seien die Ebenen P und Q durch die Ebene S gelenkig verbunden. Von jeder Ebene seien mehrere Lagen P_1, P_2, P_3, . . . bezw. Q_1, Q_2 Q_3, . . . bezw. S_1, S_2, S_3, . . . gegeben, die einander zugeordnet sind. Die Pole jeder Ebene werden entsprechend mit P^{12}, P^{13}, . . . bezw. Q^{12}, Q^{13}, . . . bezw. S^{12}, S^{13}, . . . bezeichnet.

Betrachtet man zunächst drei einander zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q, so ist bei Annahme eines beliebigen Punktes D als Gelenkpunkt der Ebenen P und S der zugeordnete Gelenkpunkt E der Ebenen Q und S eindeutig bestimmt. Bei der Ermittlung des Punktes E geht man davon aus, daß die Länge DE sich nicht ändert und daher die relativen Lagen des Punktes D gegen eine der drei Lagen Q_1, Q_2, Q_3 der Ebene Q, z. B. gegen Q_1, auf einem Kreise um E_1 liegen müssen[1]). In den Ebenen

[1]) Hierüber vergl. M. Grübler, Getriebelehre, S. 107 u. f.

P_1, P_2, P_3 seien drei beliebige homologe Punkte D_1, D_2, D_3 gegeben (Abb. 11); die mit diesen Punkten zusammenfallenden Punkte der Ebenen Q_1, Q_2 bezw. Q_3 werden mit D_1', D_2', D_3' bezeichnet. In der Ebene Q_1 lassen sich die den Punkten D_2' und D_3' der Ebenen Q_2 bezw. Q_3 entsprechenden Punkte D_2^1 bezw. D_3^1 konstruieren, wobei darauf zu achten ist, daß D_2' und D_2^1 auf einem Kreise um Q^{12} liegen und daß der Winkel $D_2' Q^{12} D_2^1$ doppelt so groß ist wie der Winkel $Q^{23} Q^{12} Q^{13}$ des Poldreiecks. Entsprechend liegen D_3' und D_3^1 auf einem Kreise um Q^{13}, und es ist Winkel $D_3' Q^{13} D_3^1 = 2\, Q^{23} Q^{13} Q^{12}$. Durch diese Beziehungen sind die Punkte D_2^1 und D_3^1 in der Ebene Q_1 bestimmt. Der Mittelpunkt E_1 des Kreises durch die drei Punkte D_1', D_2^1, D_3^1 ist der gesuchte Gelenkpunkt der Ebene Q_1 und der Radius des eben gefundenen Kreises ist gleich dem Abstande DE der Gelenkpunkte der Ebenen P und Q. Man konstruiert nun aus dem Poldreieck $Q^{12} Q^{13} Q^{23}$ zum Punkte E_1 die homologen Punkte E_2 und E_3 der Ebenen Q_2 bezw. Q_3, und es muß sich dann zeigen, daß $E_1 D_1 = E_2 D_2 = E_3 D_3$ ist.

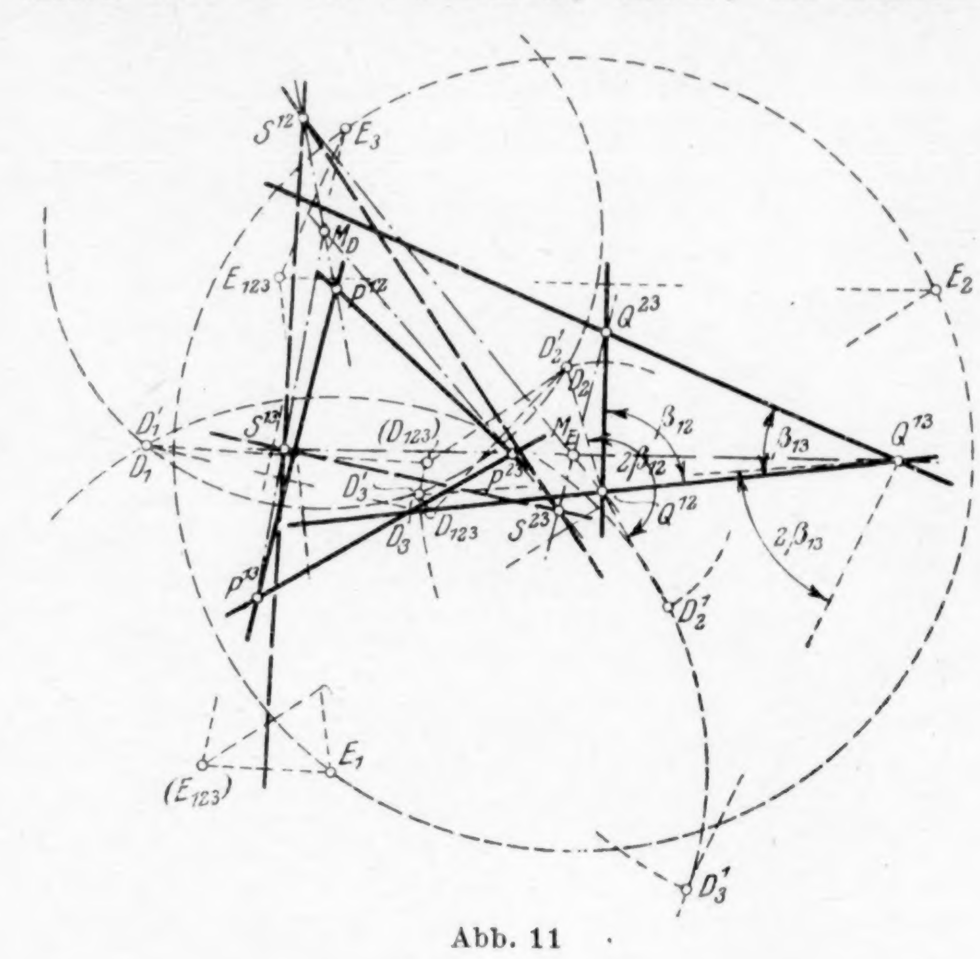


Abb. 11

Durch die Punkte D und E ist die Ebene S bestimmt, deren Lagen S_1, S_2, S_3 seien, und deren entsprechende Pole S^{12}, S^{13}, S^{23} durch die Punktepaare $D_1 E_1$, $D_2 E_2$, $D_3 E_3$ bestimmt sind. Dem Punkte D, der den beiden Ebenen P und S angehört, sei als Mittelpunkt des Kreises durch die drei homologen Punkte D_1, D_2, D_3 der Punkt M_D zugeordnet, ebenso dem gemeinsamen Punkte E der Ebenen Q und S ein Punkt M_E als Mittelpunkt des Kreises durch die drei homologen Punkte E_1, E_2, E_3. Da die Mittelsenkrechte zu $D_1 D_2$ durch M_D geht, die Punkte D_1 und D_2 aber auch von den Polen P^{12} und S^{12} je gleiche Abstände haben, so folgt, daß die Punkte M_D, P^{12} und S^{12} in einer Geraden liegen. Das Entsprechende gilt auch für die anderen Pole. Somit finden wir den Satz: Die Verbindungslinien je zweier entsprechender Pole der Ebenen P und S bilden ein Strahlenbüschel durch den Mittelpunkt M_D des Kreises durch die homologen Lagen D_1, D_2, D_3 des Gelenkpunktes beider Ebenen. Ebenso bilden die Geraden durch je zwei entsprechende Pole der Ebenen Q und S ein Strahlenbüschel durch den Punkt M_E. Hiernach findet man den Pol S^{12} als Schnittpunkt der Geraden $P^{12} M_D$ und $Q^{12} M_E$ und entsprechend die Pole S^{13} und S^{23} als Schnittpunkte der Geraden $P^{13} M_D$ und $Q^{13} M_E$ bezw. $P^{23} M_D$ und $Q^{23} M_E$. Da die Punkte D und E der Ebene S angehören, so müssen die von D_1, D_2, D_3 bezw. E_1, E_2, E_3 auf die entsprechenden Seiten des Poldreiecks $S^{12} S^{13} S^{23}$ gefällten Lote sich in je einem Punkte (D_{123}) bezw. (E_{123}) schneiden, wobei $(D_{123})(E_{123}) = D_1 E_1 = D_2 E_2 = D_3 E_3$ ist.

Den Lagen P_1, P_2, P_3 der Ebene P waren die Lagen Q_1, Q_2, Q_3 der Ebene Q eindeutig zugeordnet worden, so daß also Q sich in der Lage Q_1 befindet, wenn P die Lage P_1 einnimmt. Das Gleiche gilt für die Lagen P_2 und Q_2 sowie P_3 und Q_3. Denkt man sich nun P_2 und Q_2 als ein starres Gebilde so zurückbewegt, daß Q_2 mit Q_1 zusammenfällt, dann nimmt die mit Q_2 vorübergehend als starr verbunden gedachte Ebene P_2 die Lage P_2^1 ein. In der gleichen Weise bewegt man das System der beiden starr verbunden gedachten einander zugeordneten Ebenen Q_3 und P_3 so, daß Q_3 mit Q_1 zusammenfällt; die Lage, in die dann P_3 gelangt, werde mit P_3^1 bezeichnet. Ordnet man nun die Ebenen P_1, P_2^1 und P_3^1 den Ebenen Q_1, Q_2, Q_3 bezw. P_1, P_2, P_3 zu, so sind P_1, P_2^1, P_3^1 die relativen Lagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1. Die zu ihnen gehörigen Pole werden entsprechend mit R^{12}, R^{13}, R^{23} bezeichnet und in folgender Weise

gefunden (Abb. 12). Die im Pole P^{12} zusammenfallenden homologen Punkte der Ebenen P_1 und P_2 seien die Punkte H_1 und H_2, deren homologer Punkt H_3 in der Ebene P_3 ermittelt wird, indem man von P^{12} auf $P^{13}\,P^{23}$ das Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Entsprechend ergibt sich zu den im Pole P^{13} zusammenfallenden Punkten J_1 und J_3 der homologe Punkt J_2 und zu den in P^{23} lie-

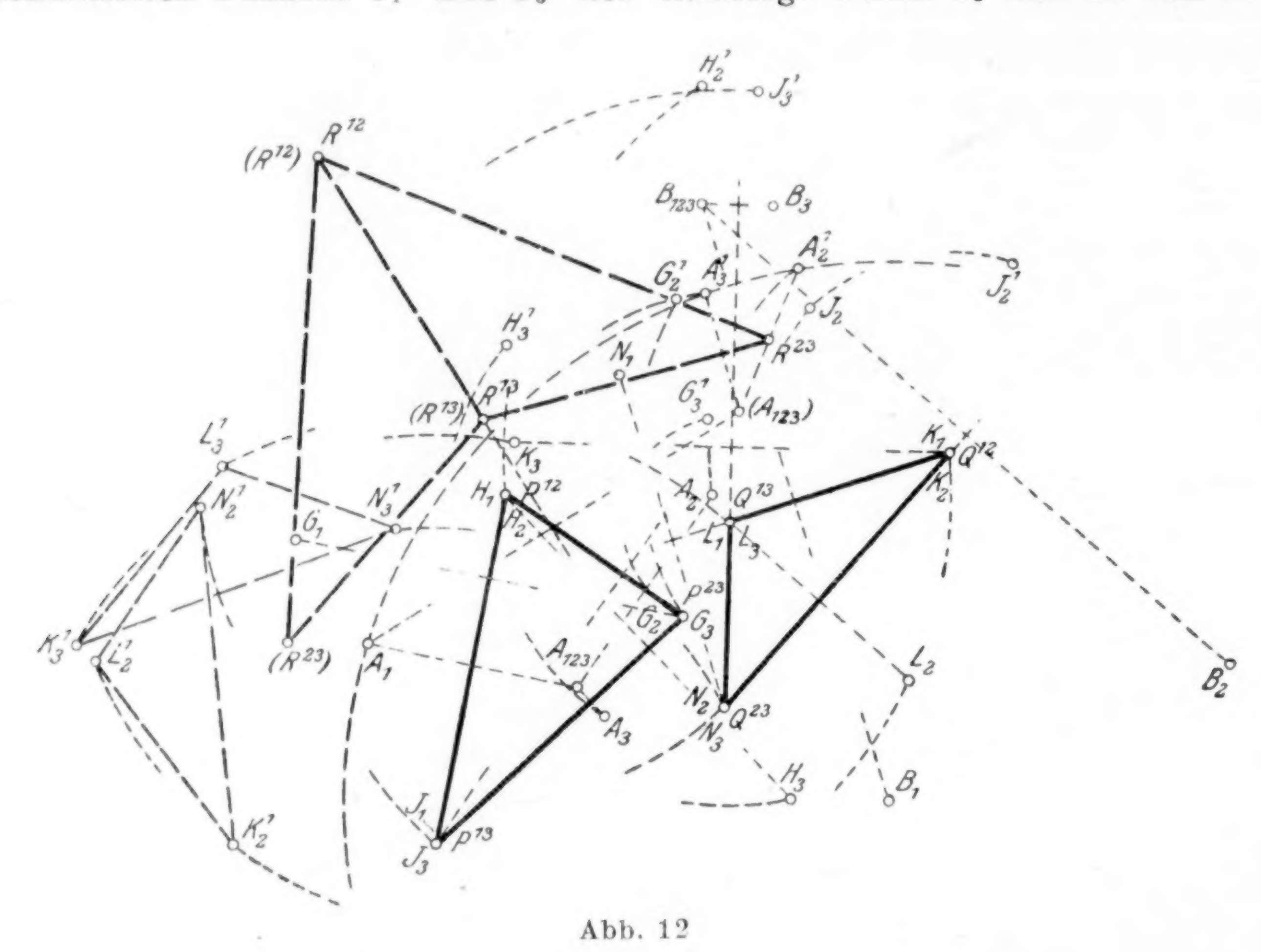


Abb. 12

genden Punkten G_2 und G_3 der homologe Punkt G_1. Man bringt nun die Punkte G_3, H_3, J_3 durch Drehung um den Pol Q^{13} um einen Winkel, der doppelt so groß ist wie der Poldreieckwinkel $Q^{23}Q^{13}Q^{12}$, in die Lagen $G_3{}^1$, $H_3{}^1$ bezw. $J_3{}^1$. Ferner ergeben sich entsprechend die Punkte $G_2{}^1$, $H_2{}^1$, $J_2{}^1$, indem man die Punkte G_2, H_2, J_2 um Q^{12} dreht und zwar um einen Winkel, der doppelt so groß ist wie der Winkel $Q^{13}Q^{12}Q^{23}$. Hierbei sind G_1, H_1, J_1 Punkte der Ebene P_1, ferner $G_2{}^1$, $H_2{}^1$, $J_2{}^1$ Punkte der Ebene $P_2{}^1$ und $G_3{}^1$, $H_3{}^1$, $J_3{}^1$ Punkte der Ebene $P_3{}^1$. Durch je zwei der genannten Punkte in jeder Ebene sind dann die Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} als Schnittpunkte von Mittelsenkrechten bestimmt.

Ermittelt man umgekehrt die relativen Lagen Q_1, $Q_2{}^1$, $Q_3{}^1$ der Ebene Q gegen die Ebene P_1, so bleiben die beiden Ebenen P_1 und Q_1 ebenso wie im vorherigen Falle in der gleichen gegenseitigen Lage. Hieraus folgt, daß die Pole (R^{12}) und (R^{13}) der relativen Lagen der Ebene Q gegen P_1 mit den entsprechenden Polen R^{12} bezw. R^{13} der Relativlagen der Ebene P gegen Q_1 zusammenfallen. Aus den Eigenschaften der Relativbewegung ergibt sich nun, daß die Winkel des Poldreiecks $R^{12}R^{13}R^{23}$ gleich der Differenz der entsprechenden Winkel der Poldreiecke $P^{12}P^{13}P^{23}$ und $Q^{12}Q^{13}Q^{23}$ sind. Hierbei ist den Winkeln ein Richtungssinn beizulegen, der in den einzelnen Polen durch die Marken der beiden andern Pole des Dreiecks bestimmt wird. Daher sind die entsprechenden Winkel der beiden Dreiecke $R^{12}R^{13}R^{23}$ und $(R^{12})\,(R^{13})\,(R^{23})$ absolut genommen einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Da beide Dreiecke die Seite $R^{12}R^{13}$ gemeinsam haben, so sind sie kongruent, und die beiden Pole R^{23} und (R^{23}) liegen symmetrisch bezüglich der Geraden $R^{12}R^{13}$.

In der Ebene P sei ein beliebiger Punkt A mit den homologen Lagen A_1, A_2, A_3 gegeben. Die Relativlagen $A_2{}^1$, $A_3{}^1$ von A gegen die Ebene Q_1 findet man dann als homologe Punkte zu A_1 aus dem Poldreieck $R^{12}R^{13}R^{23}$ (Abb. 12). Es sei B_1 der Mittelpunkt des Kreises durch A_1, $A_2{}^1$, A_3. Betrachtet man dann B_1 als Punkt der Ebene Q_1 und ermittelt aus dem Poldreieck $Q^{12}Q^{13}Q^{23}$ seine homologen Punkte B_2 und B_3 in den Ebenen Q_2 bezw. Q_3, so sind B_1, B_2, B_3 die homologen Lagen desjenigen Punktes B der Ebene Q, der vom gegebenen Punkte A der Ebene P in den drei als einander zugeordnet gegebenen Lagen beider Ebenen die gleiche Entfernung besitzt. Diese Entfernung ist gleich dem Radius des um B_1 geschlagenen durch A_1, $A_2{}^1$, $A_3{}^1$ gehenden Kreises.

Hiernach läßt sich die Aufgabe, zu einem Punkte A der Ebene P denjenigen Punkt B der Ebene Q zu konstruieren, der während der drei betrachteten Lagen von A die gleiche Entfernung hat, unter der Benutzung der Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} noch einfacher lösen als in dem oben behandelten Falle, in dem die Ebene S hinzugezogen wurde.

Es soll jetzt zu den bisher behandelten drei Lagen der Ebenen P und Q noch eine vierte Lage P_4 bezw. Q_4 hinzugenommen werden. Ermittelt man hier die Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1, so findet man die sechs Pole R^{12} R^{13}, R^{23}, R^{14}, R^{24}, R^{34}. Die Aufgabe, in den Ebenen P bezw. Q die Gelenkpunkte A und B zu bestimmen, in denen die beiden Ebenen durch eine dritte Ebene S gelenkig verbunden werden können, ist nun auf die Frage nach den Kreispunkten im System der Relativlagen zurückgeführt. Man zeichnet zu den Polen $R^{12}, \ldots . R^{34}$ die Mittelpunktkurve, welche den geometrischen Ort aller Punkte B_1 der Ebene Q_1 darstellt, die als Gelenkpunkte in Q_1 gewählt werden können. Die diesem Punkte B_1 zugeordneten Gelenkpunkte A_1 der Ebene P_1 liegen auf der Kreispunktkurve, die durch die Punkte R^{12}, $R_1{}^{34}$, R^{13}, $R_1{}^{24}$ bestimmt ist. Man kann also bei je vier einander zugeordneten Lagen der Ebenen P und Q den einen der beiden Gelenkpunkte nicht mehr willkürlich annehmen, sondern muß ihn auf einer bestimmten Kurve, der Mittelpunktkurve bezw. der Kreispunktkurve, wählen. Greift man einen beliebigen Punkt A_1 auf der Kreispunktkurve in der Relativebene R_1 heraus und ermittelt seine homologen Punkte $A_2{}^1$, $A_3{}^1$, $A_4{}^1$ in den Relativebenen R_2, R_3 bezw. R_4, so liegen A_1, $A_2{}^1$, $A_3{}^1$, $A_4{}^1$ auf einem Kreise um einen Punkt B_1 der Ebene Q_1, der auf der Mittelpunktkurve der Relativebenen R_1, R_2, R_3, R_4 gelegen ist. Man verfährt nun weiter, wie es oben bei je drei Lagen der Ebenen P und Q angegeben wurde. Man betrachtet A_1 als Punkt der Ebene P_1 und konstruiert seine homologen Punkte A_2, A_3, A_4 in den Ebenen P_2, P_3, P_4, und ebenso bestimmt man zum Punkte B_1 der Ebene Q_1 die homologen Punkte B_2, B_3, B_4 in den Ebenen Q_2, Q_3, Q_4. Dann ist, wie gefordert wurde, $A_1 B_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3 = A_4 B_4$, so daß also die Ebenen P und Q in den Punkten A bezw. B durch eine starre dritte Ebene gelenkig verbunden werden können. Da es unendlich viele Paare zugeordneter Gelenkpunkte A bezw. B in den Ebenen P bezw. Q gibt, so kann man noch eine weitere Annahme machen, durch die dann die Gelenkpunkte festgelegt sind. Fordert man z. B., daß die Entfernung AB einen vorgeschriebenen Wert l hat, so zeichnet man für drei der vier Relativebenen R_1, R_2, R_3, R_4, z. B. für R_1, R_2, R_3, in R_1 die R_1-Kurve für $r = l$, welche die Kreispunktkurve der Ebene R_1 in den gesuchten Punkten A_1 schneidet. Jeder der erhaltenen (im allgemeinen sechs) Schnittpunkte kann in der Ebene P_1 als Gelenkpunkt verwendet werden, und zu jedem ist eindeutig ein Gelenkpunkt B_1 in der Ebene Q_1 bestimmt, wobei $A_1 B_1 = l$ ist.

Sind **fünf** einander zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q gegeben, so findet man in den Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 fünf Relativebenen R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 mit den zehn Polen R^{12}, R^{13}, usw. Die Gelenkpunkte A bezw. B der beiden Ebenen P und Q ergeben sich dann auf Grund der früheren Untersuchungen wie folgt. Zu den fünf Relativebenen zeichnet man zwei Mittelpunktkurven, z. B für R_1, R_2, R_3, R_4 und R_1, R_2, R_3, R_5 und erhält in den (im allgemeinen vier) Schnittpunkten beider Kurven Punkte B_1, von denen jeder als Gelenkpunkt der Ebene Q_1 verwendet werden kann. Die homologen Punkte B_2, B_3, B_4, B_5 sowie der zugeordnete Gelenkpunkt A der Ebene P mit seinen homologen Lagen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ergeben sich dann in derselben Weise, wie es oben bei je vier Lagen der Ebenen P und Q angegeben wurde. Bei je sechs und mehr zugeordneten Lagen zweier Ebenen P und Q lassen sich im allgemeinen nicht mehr Gelenkpunkte A bezw. B ermitteln, deren Abstände in den sechs Lagen die gleiche Größe haben.

4. Die Ermittlung der Koppelgelenkpunkte beim Gelenkviereck und beim Schubkurbelgetriebe. Die beiden Kurbeln des Gelenkvierecks seien durch die Ebenen P bezw. Q und die Koppel durch die Ebene S dargestellt (Abb. 13). Hier handelt es sich um die Aufgabe, in den Kurbelebenen P bezw. Q die Gelenkpunkte A bezw. B, in denen die Koppel S mit den Kurbeln verbunden ist, so zu ermitteln, daß einer Anzahl beliebig gegebener Lagen der Kurbel P eine gleiche Zahl gegebener Stellungen der Kurbel Q zugeordnet ist. Sind **drei** Lagen der Kurbelebenen als einander zugeordnet vorgelegt, so darf man den einen Gelenkpunkt beliebig wählen; der andere ist dann eindeutig bestimmt. Bei **vier** Lagen beider Ebenen darf man einen der beiden Gelenkpunkte auf einer bestimmten Kurve

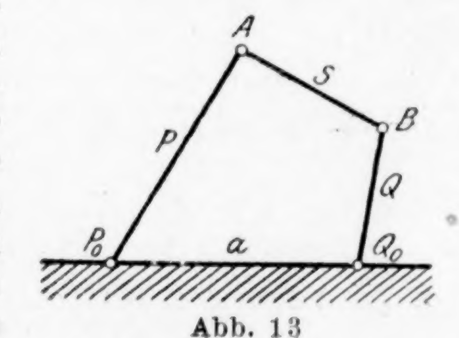


Abb. 13

willkürlich annehmen, während bei fünf zugeordneten Lagen der Kurbelebenen die Gelenkpunkte sich als Schnittpunkte zweier Kurven ergeben, wobei also keine willkürliche Annahme mehr gemacht werden darf.

Der Fall des Gelenkvierecks ergibt sich, wenn die sämtlichen Pole aller Lagen der Kurbelebene P in einem Punkte P_0 und ebenso alle Pole der Lagen der Kurbelebene Q in einem Punkte Q_0 zusammenfallen. Die Entfernung a der Punkte P_0 und Q_0, der Steg des Gelenkvierecks, sei gegeben. Es sollen zunächst je **drei** Lagen der Ebenen P und Q betrachtet werden, die durch drei entsprechende Punkte E_1, E_2, E_3 bezw. F_1, F_2, F_3 bestimmt seien (Abb. 14). Die Drehwinkel der Ebene P, d. h. die Winkel, um die ihre Lagen gegeneinander gedreht sind, werden entsprechend mit α_{12}, α_{13}, α_{23} bezeichnet, die Drehwinkel der Ebene Q mit β_{12}, β_{13}, β_{23}. Durch diese Winkel und den Abstand a der Pole P_0 und Q_0 sind die Lagen der beiden Kurbelebenen definiert. Um nun die Pole der Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 zu finden, verfahren wir wie im allgemeinen Falle. Beim Gelenkviereck entarten die Poldreiecke der Ebenen P und Q zu je einem Punkte P_0 bezw. Q_0, und man hat an Stelle der Winkel der beiden Poldreiecke die Hälfte der entsprechenden Drehwinkel der Ebenen zu setzen. Man ermittelt nun einen Punkt $P_2{}^1$, der auf dem um Q_0 mit $Q_0 P_0$ geschlagenen Kreise und ferner auf einem Strahle durch Q_0 liegt, der gegen die Gerade $P_0 Q_0$ um den Winkel β_{12} im Richtungssinn $F_2 F_1$ gedreht ist. Ebenso findet man einen Punkt $P_3{}^1$ als Schnittpunkt des Kreises um Q_0 mit dem Radius $P_0 Q_0$ und der Geraden durch Q_0, die mit $P_0 Q_0$ den Winkel $F_3 Q_0 F_1 = \beta_{13}$ einschließt. Ferner konstruiert man in ähnlicher Weise einen Punkt $E_2{}^1$, indem man um Q_0 mit $Q_0 E_2$ den Kreis schlägt und diesen mit der Geraden durch Q_0 zum Schnitt bringt, die mit $Q_0 E_2$ den Winkel β_{12} im Richtungssinn $F_2 F_1$ bildet, und weiter einen Punkt $E_3{}^1$ als Schnittpunkt des Kreises um Q_0 mit dem Radius $Q_0 E_3$ und der Geraden durch Q_0, die gegen $Q_0 E_3$ unter dem Winkel $F_3 Q_0 F_1 = \beta_{13}$ geneigt ist. Die Mittelsenkrechten zu $P_0 P_2{}^1$ und $E_1 E_2{}^1$ schneiden sich im Pole R^{12}, die Mittelsenkrechten zu $P_0 P_3{}^1$ und $E_1 E_3{}^1$ in R^{13} und diejenigen zu $P_2{}^1 P_3{}^1$ und $E_2{}^1 E_3{}^1$ in R^{23}, wobei R^{12}, R^{13}, R^{23} die Pole der relativen Lagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 sind. Hierbei schließt die Gerade $Q_0 R^{12}$, die Mittelsenkrechte zu $P_0 P_2{}^1$, mit $P_0 Q_0$ den Winkel $^1/_2 \beta_{12}$ ein, da der Winkel $P_0 Q_0 P_2{}^1 = \beta_{12}$ durch $Q_0 R^{12}$ halbiert wird. Ebenso findet man, daß die Gerade $Q_0 R^{13}$ mit $Q_0 P_0$ den Winkel $^1/_2 \beta_{13}$ bildet.

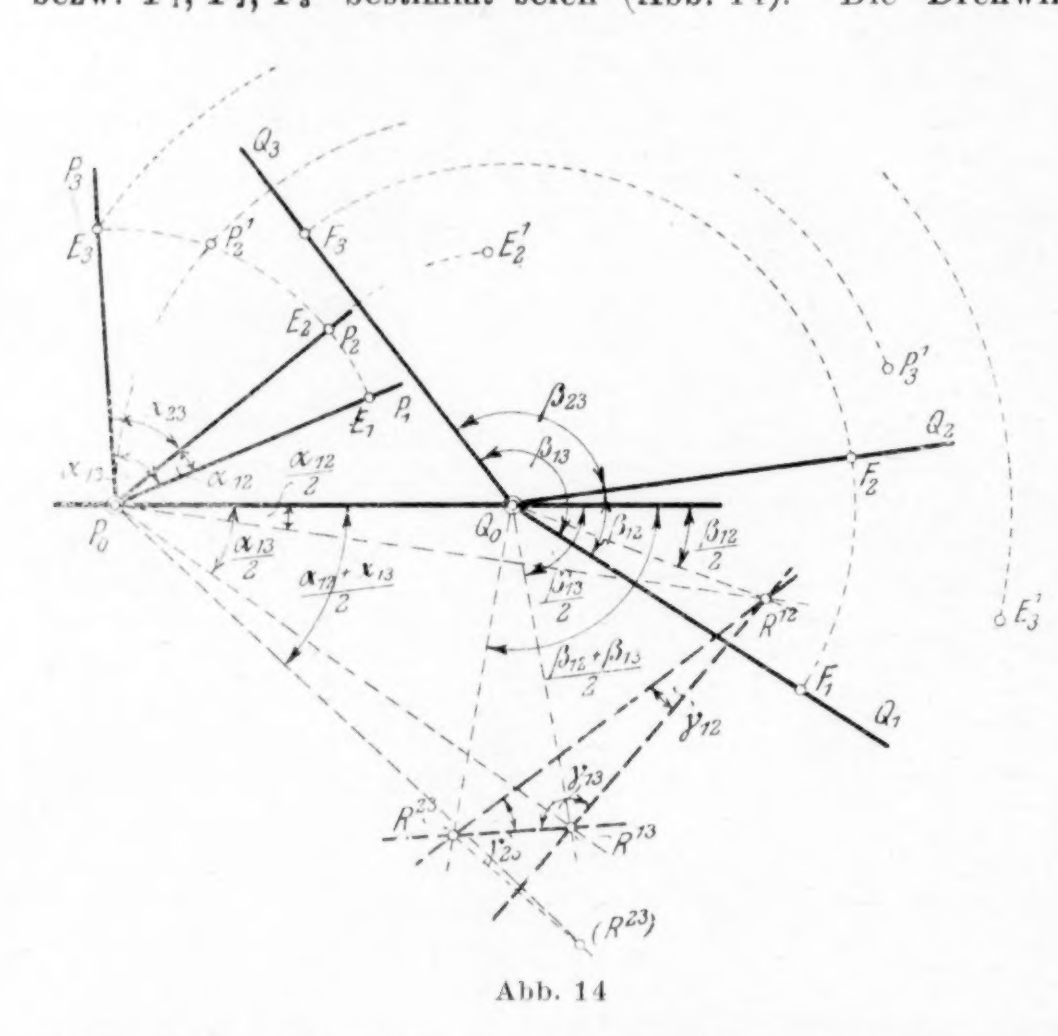


Abb. 14

Wie allgemein gezeigt wurde, gelten die Pole R^{12} und R^{13} sowohl für die Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1, wie auch umgekehrt für die relativen Lagen der Ebene Q gegen die Ebene P_1. Hieraus folgt, daß R^{12} und R^{13} auch auf Geraden durch P_0 liegen, die mit $P_0 Q_0$ d e Winkel $^1/_2 \alpha_{12}$ bezw. $^1/_2 \alpha_{13}$ bilden. Was die Lage des Poles R^{23} anbelangt, so hat der Winkel, den die Gerade $Q_0 R^{23}$ mit $P_0 Q_0$ einschließt, die Größe

$$-(\sphericalangle P_0 Q_0 P_2{}^1 + \sphericalangle \, {}^1/_2 P_2{}^1 Q_0 P_3{}^1) = -(\beta_{12} + {}^1/_2 \beta_{23})$$
$$= -\left(\beta_{12} + \frac{\beta_{13} - \beta_{12}}{2}\right) = -\,{}^1/_2 (\beta_{12} + \beta_{13}).$$

Hierdurch ist die unter diesem Winkel gegen $P_0 Q_0$ geneigte Gerade durch Q_0 als ein geometrischer Ort für den Pol R^{23} gefunden. Da ferner allgemein die Winkel γ_{12},

γ_{13}, γ_{23} des Poldreiecks $R^{12}R^{13}R^{23}$ gleich der Differenz der entsprechenden Winkel in den Poldreiecken der Ebenen P_1, P_2, P_3 bezw. Q_1, Q_2, Q_3 sind, so folgt unter Beachtung des Richtungssinnes der Winkel (Abb. 14)

$$\gamma_{12} = {}^1/_2(\beta_{12}-\alpha_{12}),\quad \gamma_{23} = {}^1/_2(\beta_{23}-\alpha_{23}),\quad \gamma_{13} = 180^0 - {}^1/_2(\beta_{13}-\alpha_{13}).$$

Durch diese Winkel ist der Pol R^{23} vollständig bestimmt. Da bei dieser Art der Ermittlung des Poles R^{23} jedoch leicht Fehler unterlaufen können, wenn man den Richtungssinn der Winkel nicht genau beachtet, soll noch eine weitere Konstruktion angegeben werden. Wie allgemein nachgewiesen wurde, liegt der Pol R^{23} für die Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 bezüglich der Polgeraden $R^{12}R^{13}$ symmetrisch zum Pole (R^{23}) der Relativlagen der Ebene Q gegen die Ebene P_1. Wendet man die für die erste Relativbewegung angestellten Betrachtungen für die umgekehrte Relativbewegung an, so findet man, daß der Pol (R^{23}) auf einer Geraden durch P_0 liegen muß, die mit P_0Q_0 den Winkel $-{}^1/_2(\alpha_{12}+\alpha_{13})$ bildet. Nun lassen sich R^{23} und (R^{23}) in folgender Weise konstruieren (Abb. 15). Man zieht durch Q_0 und P_0 je eine Gerade unter dem Winkel $-{}^1/_2(\beta_{12}+\beta_{13})$ bezw. $-{}^1/_2(\alpha_{12}+\alpha_{13})$ gegen Q_0P_0, welche die Gerade $R^{12}R^{13}$ in N bezw. M unter den Winkeln ν bezw. μ schneiden. Durch M und N legt man je eine Gerade, die zu P_0M bezw. Q_0N in bezug auf $R^{12}R^{13}$ symmetrisch liegen. Dann wird Q_0N von der Geraden durch M in R^{23} und P_0M von der Geraden durch N in (R^{23}) geschnitten.

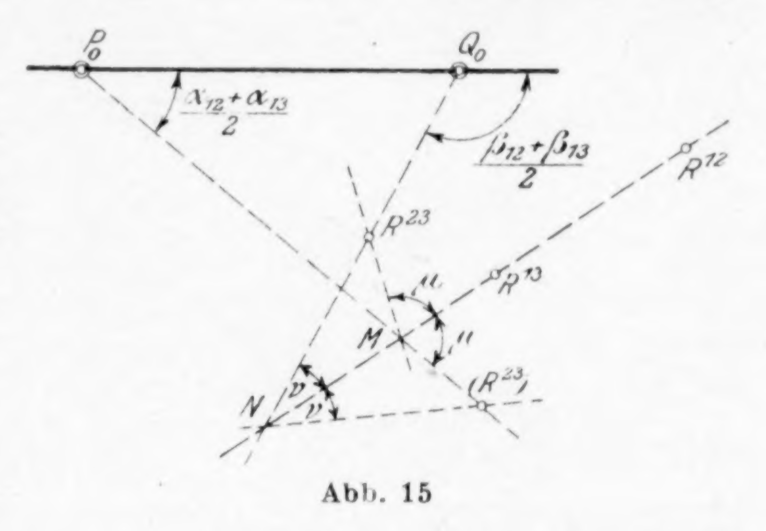


Abb. 15

Wenn beim Gelenkviereck vier Lagen der Kurbelebenen P und Q durch die weiteren Winkel α_{14} bezw. β_{14} vorgelegt sind, so hat man außer den Polen R^{12}, R^{13}, R^{23} noch die Pole R^{14}, R^{24}, R^{34} zu ermitteln. Man verfährt hierbei ganz entsprechend wie bei drei Lagen. Der Pol R^{14} ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Geraden durch P_0 bezw. Q_0, die mit P_0Q_0 die Winkel $-{}^1/_2\alpha_{14}$ bezw. $-{}^1/_2\beta_{14}$ bilden. R^{24} wird dann ebenso gefunden wie R^{23}, indem man an Stelle von $R^{12}R^{13}$ die Gerade $R^{13}R^{14}$ benutzt. Hieraus folgt unmittelbar die Gesetzmäßigkeit, nach der die Pole der Relativlagen auch bei mehr als je vier Lagen der Kurbelebenen P und Q gefunden werden können.

Wenn außer dem Steg P_0Q_0 eines Gelenkviereckes fünf beliebige Lagen der Kurbelebenen P und Q als einander zugeordnet gegeben sind, so läßt sich nunmehr die Koppel AB so bestimmen, daß bei der Bewegung des Gelenkviereckes die geforderte gegenseitige Zuordnung der fünf Lagen der Kurbelebenen tatsächlich erfüllt wird. Um die Gelenkpunkte A und B, in denen die Koppel mit den Kurbelebenen verbunden ist, zu finden, zeichnet man in der mit P_1 zusammenfallenden Relativebene R_1 zwei Kreispunktkurven, z. B. für die beiden Systeme $R_1R_2R_3R_4$ und $R_1R_2R_3R_5$, die sich im allgemeinen in vier Punkten schneiden. Zu diesen ermittelt man in den Ebenen R_2, R_3, R_4, R_5, wie auch in den Ebenen P_2, P_3, P_4, P_5 die entsprechenden Gruppen von vier homologen Punkten $A_2{}^1$, $A_3{}^1$, $A_4{}^1$, $A_5{}^1$ bezw. A_2, A_3, A_4, A_5. Die Punkte A_1, $A_2{}^1$, $A_3{}^1$, $A_4{}^1$, $A_5{}^1$ liegen auf einem Kreise um den Mittelpunkt B_1, der als Punkt der Ebene Q_1 anzusehen ist und zu dem man die homologen Punkte B_2, B_3, B_4, B_5 in den Ebenen Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 konstruiert. Dann ist $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = A_5B_5$ und die Punkte A und B sind die gesuchten Koppelgelenkpunkte. Wenn nur vier gegebene Lagen der Kurbelebenen P und Q einander zugeordnet werden sollen, so läßt sich noch eine Forderung erfüllen, wobei insbesondere zwei Möglichkeiten erwähnt seien; entweder ist die Länge k der Koppel oder die Länge einer der beiden Kurbeln vorgeschrieben. Im ersteren Falle zeichnet man in der Ebene R_1 für das System $R_1R_2R_3R_4$ die Kreispunktkurve und z. B. für das System $R_1R_2R_3$ die R_1-Kurve für den Wert $r=k$. Beide Kurven schneiden sich im allgemeinen in sechs Punkten A_1, die der Ebene P_1 angehören. Dann ermittelt man, wie oben angegeben ist, die homologen Punkte A_2, A_3, A_4 in den Ebenen P_2, P_3, P_4 und die zugeordneten homologen Punkte B_1, B_2, B_3, B_4 der Ebenen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, wobei die Forderung $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = k$ erfüllt ist. Wird im zweiten Falle die Länge der Kurbel $P_0A = r_1$ gegeben, so zeichnet man wieder für das System $R_1R_2R_3R_4$ in der Ebene R_1 die Kreispunktkurve und ermittelt deren Schnittpunkte A_1 mit dem um P_0 mit dem Radius r_1 geschlagenen Kreise. Im allgemeinen gibt es vier solcher Schnitt-

punkte A_1, zu denen man in den Ebenen P_2, P_3, P_4 die homologen Punkte A_2, A_3, A_4, die von P_0 die gleiche Entfernung r_1 besitzen, und in den Ebenen R_2, R_3, R_4 die homologen Punkte A_2^1, A_3^1, A_4^1 konstruiert, die mit A_1 auf einem Kreise um einen Punkt B_1 der Ebene Q_1 liegen. Bestimmt man zu B_1 in den Ebenen Q_2, Q_3, Q_4 die homologen Punkte B_2, B_3, B_4, so ist $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4$, so daß wir in A und B die gesuchten Koppelgelenkpunkte gefunden haben.

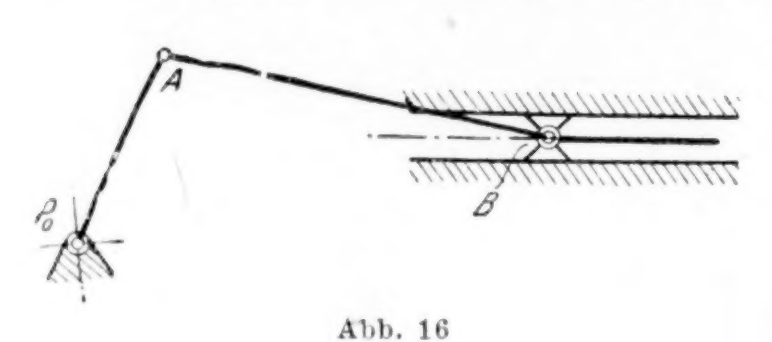


Abb. 16

Von den Sonderfällen des Gelenkviereckes soll der wichtigste, das Schubkurbelgetriebe, besonders behandelt werden (Abb. 16). Hier sei der Kurbelmittelpunkt P_0 und die Schubrichtung der Kreuzkopfebene gegeben und es seien zunächst wieder drei einander zugeordnete Lagen der Kurbelebene P und der Kreuzkopfebene Q vorgelegt. Die Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} bezw. (R^{23}) der Relativlagen von P gegen Q_1 ergeben sich, wenn man bei der für das Gelenkviereck angegebenen Konstruktion den Punkt Q_0 als den unendlich fernen Punkt einer Senkrechten zur Schubrichtung betrachtet.

Die Drehwinkel der Ebenen P_2 und P_3 gegen die Ebene P_1 seien wieder α_{12} bezw. α_{13}. Die Lagen Q_2 und Q_3 der Kreuzkopfebene Q gegen die Lage Q_1 seien durch die Strecken b_{12} bezw. b_{13} gegeben. Man zieht durch P_0 eine Parallele zur Schubrichtung (Abb. 17) und bestimmt auf dieser die Punkte E_{12}, E_{13}, E_{23}, indem man die Strecken $P_0E_{12} = -\frac{1}{2}b_{12}$, $P_0E_{13} = -\frac{1}{2}b_{13}$, $P_0E_{23} = -\frac{1}{2}(b_{12}+b_{13})$ aufträgt. Ferner zieht man durch P_0 eine Senkrechte P_0P_1 zur Schubrichtung, trägt an diese in P_0 die gegebenen Winkel α_{12} und α_{13} an und erhält dadurch die Strahlen P_0P_2 und P_0P_3. Hierbei nimmt man P_1 auf der Senkrechten zur Schubrichtung von P_0 aus in derjenigen Richtung an, von der aus gesehen die Lagen Q_1, Q_2, Q_3 in dem gleichen Sinne aufeinander folgen, wie der Drehsinn der zugeordneten Winkel α_{12} und α_{13} um P_0 angibt. An P_0P_1 trägt man in P_0 den Winkel $-\frac{1}{2}\alpha_{12}$ an, dessen freier Schenkel die Senkrechte zur Schubrichtung durch E_{12} im Pole R^{12} schneidet.

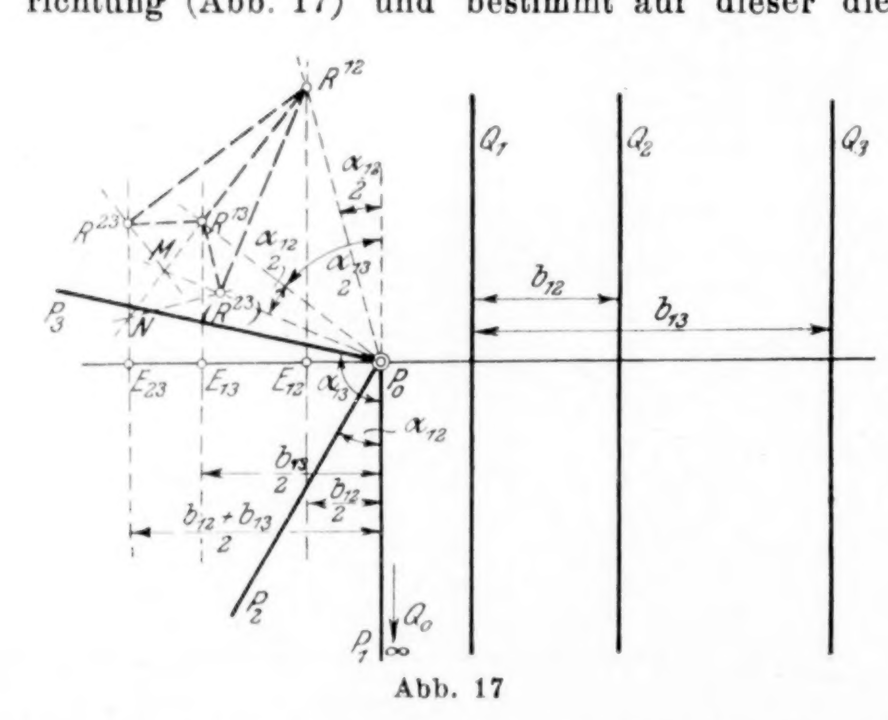


Abb. 17

Ebenso ergibt sich R^{13} als Schnittpunkt der Senkrechten zur Schubrichtung durch E_{13} mit dem freien Schenkel des in P_0 an P_0P_1 angetragenen Winkels $-\frac{1}{2}\alpha_{13}$. In P_0 trägt man nun an P_0P_1 den Winkel $-\frac{1}{2}(\alpha_{12}+\alpha_{13})$ an, dessen freier Schenkel die Gerade $R^{12}R^{13}$ in M schneidet. Weiter findet man einen Punkt N als Schnittpunkt der Geraden $R^{12}R^{13}$ mit der Senkrechten zur Schubrichtung durch E_{23}. Durch M und N zieht man je eine Gerade, die zu MP_0 bezw. NE_{23} in bezug auf $R^{12}R^{13}$ symmetrisch ist, und findet auf NE_{23} bezw. MP_0 als Schnittpunkte die Pole R^{23} bezw. (R^{23}).

Sind nicht nur drei, sondern vier oder fünf einander zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q gegeben, so findet man die entsprechenden Pole der Relativlagen, indem man die drei Lagen P_1, P_2, P_4 bezw. Q_1, Q_2, Q_4 behandelt, wobei dann R^{24} und (R^{24}) symmetrisch bezüglich der Geraden $R^{12}R^{14}$ liegen. In gleicher Weise ergeben sich die übrigen Pole.

Beim Schubkurbelgetriebe können wieder mehrere verschiedene Fragestellungen auftreten. Wenn gefordert wird, daß fünf Lagen der Kurbelebene P und der Kreuzkopfebene Q einander zugeordnet sein sollen, so findet man, wie die allgemeinen Untersuchungen gezeigt haben, für die Lage des Kurbel- und des Kreuzkopfzapfens im allgemeinen je vier Lösungen. Wird verlangt, daß nur vier Lagen der Kurbelebene P und der Kreuzkopfebene Q einander zugeordnet sein sollen, so kann man wieder eine weitere Forderung erfüllen. Man kann entweder die Länge der Kurbel oder die der Pleuelstange vorschreiben oder verlangen, daß das Kurbelgetriebe zentrisch sein soll. Die beiden

ersten Fragestellungen sind im allgemeinen Falle des Gelenkviereckes bereits behandelt worden. Wenn ein zentrisches Schubkurbelgetriebe gefordert wird, so zeichnet man im System $R_1 R_2 R_3 R_4$ die Mittelpunktkurve, welche die gegebene Kreuzkopfbahngerade im allgemeinen in drei Punkten B_1 schneidet, von denen jeder als Gelenkpunkt der Kreuzkopfebene verwendet werden kann. Man betrachtet B_1 als Punkt der Ebene Q_1, ermittelt die homologen Punkte B_2, B_3, B_4 in den Ebenen Q_2, Q_3, Q_4 und erhält damit die Lagen des Kreuzkopfes. Der Gelenkpunkt A der Kurbelebene wird dann ebenso, wie es beim Gelenkviereck gezeigt wurde, gefunden. Entsprechend verfährt man, wenn das Kurbelgetriebe nicht zentrisch sein, wenn aber der Abstand des Kurbelmittelpunktes P_0 von der Kreuzkopfbahn einen gegebenen Wert haben soll.

Wenn die Längen von Pleuelstange und Kurbel gegeben sind, oder wenn das Kurbelgetriebe zentrisch sein soll und außerdem die Länge der Kurbel oder der Pleuelstange vorgeschrieben ist, so können nur noch je drei Lagen der Kurbelebene P und der Kreuzkopfebene Q willkürlich einander zugeordnet werden. Sind die Längen r_1 bezw. k von Kurbel bezw. Pleuelstange vorgeschrieben und sind drei einander zugeordnete Lagen P_1, P_2, P_3 bezw. Q_1, Q_2, Q_3 von Kurbel- bezw. Kreuzkopfebene gegeben, so ermittelt man zunächst wieder die Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} der Relativlagen von P gegen Q_1 und zeichnet zu ihnen in der Ebene R_1 für den Wert $r = k$ die R_1-Kurve, die den um P_0 mit dem Radius r_1 geschlagenen Kreis in den gesuchten Punkten A_1 der Ebene P_1 schneidet, von denen jeder als Gelenkpunkt der Kurbelebene verwendet werden kann. Konstruiert man zu einem der gefundenen Punkte A_1, aufgefaßt als Punkt der Ebene R_1, die entsprechenden Punkte A_2^1 und A_3^1 der Ebenen R_2 bezw. R_3, so gibt der Mittelpunkt B_1 des Kreises durch A_1, A_2^1, A_3^1, der den gegebenen Radius k hat, die Lage des Kreuzkopfzapfens in der Ebene Q_1 an.

Sind wieder drei zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q vorgelegt und ferner die Bahngerade des Kreuzkopfgelenkpunktes und die Kurbellänge r_1 gegeben, so konstruiert man im Poldreieck $R^{12} R^{13} R^{23}$ zu einer Anzahl von Punkten (A_1) des um P_0 mit r_1 geschlagenen Kreises diejenigen Punkte (B_1), welche Mittelpunkte der Kreise durch drei entsprechende Punkte (A_1), (A_2^1), (A_3^1) der Ebenen R_1, R_2, R_3 sind. Die so gefundenen Punkte (B_1) bilden eine Kurve vierten Grades, welche die gegebene Bahngerade des Kreuzkopfgelenkpunktes in den gesuchten Punkten B_1 schneidet. Diesen Punkten B_1 lassen sich dann in bekannter Weise ebensoviele Punkte A_1 zuordnen, welche die Lage des Kurbelzapfens in der Ebene P_1 angeben. Wenn statt der Kurbellänge r_1 die Länge k der Pleuelstange gegeben ist, zeichnet man für die Pole R^{12}, R^{13}, (R^{23}) in der Ebene R_1 die R_1-Kurve für den Wert $r = k$ und erhält in deren Schnittpunkten B_1 mit der gegebenen Bahngeraden die gesuchten Lagen des Kreuzkopfgelenkpunktes in der Ebene Q_1. Im Poldreieck $R^{12} R^{13} (R^{23})$ konstruiert man zum Punkte B_1 der Ebene R_1 die entsprechenden Punkte B_2^1 bezw. B_3^1 der Ebenen R_2 bezw. R_3. Der Mittelpunkt A_1 des Kreises durch B_1, B_2^1, B_3^1 gibt dann die Lage des Kurbelzapfens in der Ebene P_1 an.

5. Die Forderung bestimmter Geschwindigkeiten. Bei der Synthese der Mechanismen tritt mitunter die Forderung auf, daß eine bewegte Ebene neben anderen Bedingungen noch solche erfüllen soll, die ihren Geschwindigkeitszustand betreffen[1]). Da zur Bestimmung des Geschwindigkeitszustandes einer Ebene die Lage des Momentanpoles bekannt sein muß, so müssen wir außer den bisher betrachteten Polen, die sich auf je zwei endlich verschiedene Lagen einer Ebene beziehen, noch den Momentanpol hinzunehmen.

Bei den weiteren Untersuchungen soll nun folgende allgemeine Aufgabe behandelt werden. Es seien mehrere Lagen P_1, P_2, ... bezw. Q_1, Q_2, ... zweier Ebenen P bezw. Q als einander zugeordnet gegeben, und es sollen beide Ebenen durch eine dritte Ebene S in den Punkten A bezw. B gelenkig verbunden werden. In einer der Lagen, z. B. P_1 bezw. Q_1, in der die beiden Momentanpole Π_{P1} bezw. Π_{Q1} gegeben seien, sollen die Winkelgeschwindigkeiten beider Ebenen ein vorgeschriebenes Verhältnis $\lambda = \omega_{Q1} : \omega_{P1}$ besitzen. Auf Grund dieser sowie anderer gegebener Bedingungen sind dann die Gelenkpunkte A bezw. B zu ermitteln.

Nimmt man zunächst die Punkte A und B als bekannt an, so schneiden sich die Geraden $\Pi_{P1} A_1$ und $\Pi_{Q1} B_1$ im Momentanpol Π_{S1} (Abb. 18) der Ebene S_1, und die Geschwindigkeiten v_{A1} bezw. v_{B1} der Punkte A_1 bezw. B_1 sind den Entfernungen a_1 bezw. b_1 von Π_{S1} proportional; es ist also $v_{B1} : v_{A1} = b_1 : a_1$.

[1]) Hierüber vergl. M. Grübler, Getriebelehre, S. 113 u. f.

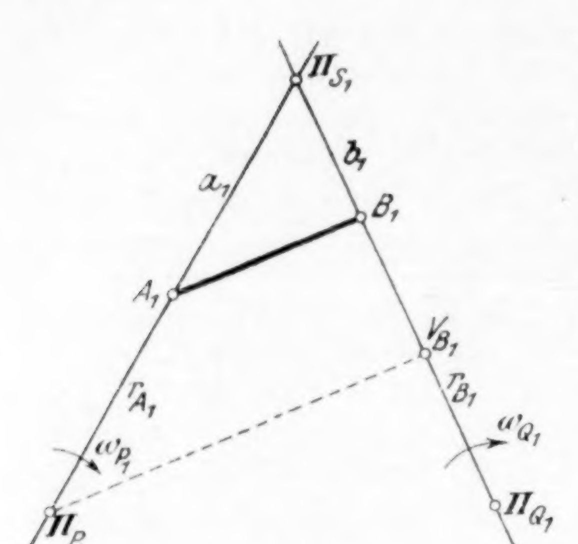


Abb. 18

Ferner ist

$$v_{B1} = r_{B1}\,\omega_{Q1} \text{ und } v_{A1} = r_{A1}\,\omega_{P1},$$

wobei

$$r_{B1} = \Pi_{Q1}\,B_1 \text{ und } r_{A1} = \Pi_{P1}\,A_1$$

ist. Wenn v_{A1} gegeben ist, so trägt man auf $A_1\,\Pi_{P1}$ die Strecke $A_1\,V_{A1} \triangleq v_{A1}$ auf und zieht durch V_{A1} zu $A_1\,B_1$ die Parallele, die $B_1\,\Pi_{Q1}$ in V_{B1} schneidet Dann stellt $B_1\,V_{B1}$ die Geschwindigkeit v_{B1} des Punktes B_1 dar. Wählt man hierbei den Zeichnungsmaßstab so, daß $v_{A1} \triangleq r_{A1}$ und daher $\omega_{P1} \triangleq 1$ ist, so liegt V_{B1} auf der durch Π_{P1} zu $A_1\,B_1$ gezogenen Parallelen (Abb 18). Wenn nun andrerseits die Winkelgeschwindigkeit ω_{Q1} der Ebene Q_1 einen vorgeschriebenen Wert $\omega_{Q1} = \lambda\,\omega_{P1}$ besitzen soll, so muß der Punkt B_1 eine Geschwindigkeit

$$v_{B1}' = r_{B1}\,\lambda\,\omega_{P1}$$

haben. Entsprechend ergibt sich auf $B_1\,\Pi_{Q1}$ ein Punkt V_{B1}', wobei unter der obigen Annahme ($\omega_{P1} \triangleq 1$)

$$B_1\,V_{B1}' = \lambda\,r_{B1}$$

ist. Man findet also den Punkt V_{B1}', indem man, z. B. mit Hilfe eines auf das Verhältnis λ eingestellten Reduktionszirkels, auf $B_1\,\Pi_{Q1}$ von B_1 die Strecke $\lambda\,r_{B1}$ aufträgt. Der geforderte Geschwindigkeitszustand der Ebene Q wird nun erreicht, wenn die beiden Punkte V_{B1} und V_{B1}' zusammenfallen.

Wir hatten gefunden, daß die Gelenkpunkte A und B bestimmt sind, wenn man je fünf Lagen der Ebenen P und Q einander zuordnet, und daß in diesem Falle daher weitere Bedingungen nicht erfüllt werden können. Wenn dagegen eine Zuordnung von nur vier Lagen gefordert wird, so kann man in einer der vier Lagen noch einen bestimmten Geschwindigkeitszustand der Ebene Q vorschreiben. In dem Falle schließlich, in dem nur drei Lagen der Ebenen P und Q als einander zugeordnet gegeben sind, kann man in zwei dieser drei Lagen einen bestimmten Geschwindigkeitszustand verlangen.

In dem ersteren Falle, in dem vier Lagen der Ebenen P und Q vorgelegt sind und in der Lage 1 das Verhältnis λ gegeben ist, findet man für die Punkte A_1 und B_1 je eine Kurve als geometrischen Ort. Um diese beiden Kurven zu finden, konstruieren wir die früher definierten Pole R^{12}, R^{13}, R^{14}, R^{23}, R^{24}, R^{34} sowie (R^{23}), (R^{24}), (R^{34}) der Relativlagen von P gegen Q_1 und umgekehrt derjenigen von Q gegen P_1 und zeichnen für die Pole R^{12}, R^{13}, R^{14}, R^{23}, R^{24}, R^{34} bezw. R^{12}, R^{13}, R^{14}, (R^{23}), (R^{24}), (R^{34}) die Mittelpunktkurve m bezw. (m). Dann ist m der geometrische Ort aller Punkte B_1 und (m) derjenige der Punkte A_1. Auf den beiden Kurven ermitteln wir eine Anzahl einander paarweise entsprechender Punkte A_1 bezw. B_1 und konstruieren mit Hilfe der Momentanpole Π_{P1} und Π_{Q1} unter der Annahme $\omega_{P1} \triangleq 1$ die entsprechenden Punkte V_{B1}, die eine Kurve β bilden (Abb 19). Ferner ermitteln wir in der oben angegebenen Weise die entsprechenden Punkte V_{B1}', indem wir auf $B_1\,\Pi_{Q1}$ die Strecke $B_1\,V_{B1}' = \lambda\,B_1'\,\Pi_{Q1}$ auftragen, und erhalten für die Punkte V_{B1}' eine Kurve β'. Die Schnittpunkte der Kurven β und β' sind diejenigen Punkte $V_{B1}{}^0$, welche die gesuchten Gelenkpunkte A bezw. B bestimmen. Die Gerade $\Pi_{Q1}\,V_{B1}{}^0$ schneidet die Kurve m in dem Gelenkpunkt $B_1{}^0$, dem auf (m) ein Punkt $A_1{}^0$ entspricht.

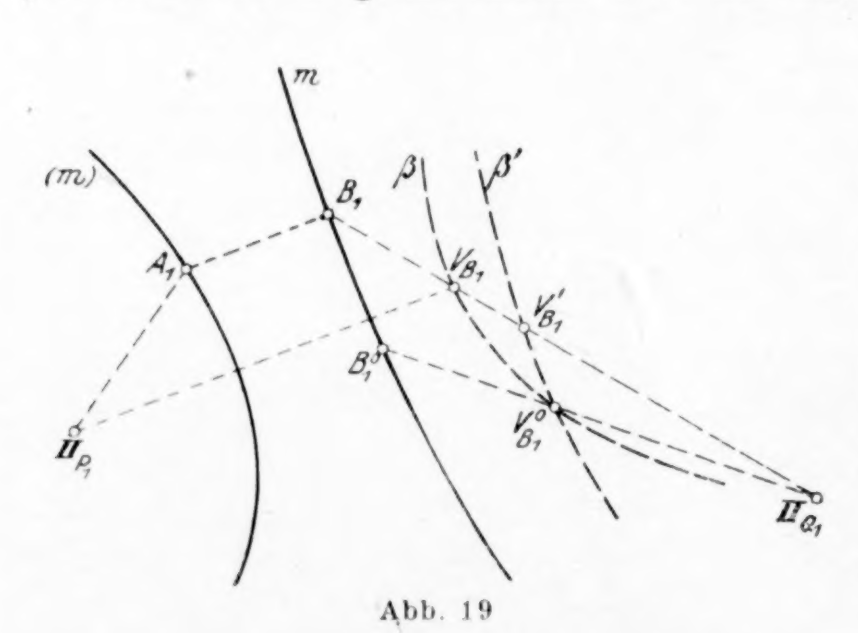


Abb. 19

Wenn nur drei gegebene Lagen P_1, P_2, P_3 bezw. Q_1, Q_2, Q_3 der Ebenen P und Q einander zugeordnet werden sollen und die Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten $\lambda_1 = \omega_{Q1} : \omega_{P1}$ in der Lage 1 und $\lambda_2 = \omega_{Q2} : \omega_{P2}$ in der Lage 2 mit den Momentanpolen Π_{P1}, Π_{P2} bezw. Π_{Q1}, Π_{Q2} gegeben sind, so erhält man die Gelenkpunkte A und B auf Grund

der folgenden Ueberlegung. Wie wir früher gefunden hatten, läßt sich bei drei einander zugeordneten Lagen der Ebenen P und Q zu jedem Punkte A der Ebene P eindeutig ein Punkt B der Ebene Q bestimmen. Allen Punkten A_1, die auf einer Geraden g_1 liegen, entspricht als geometrischer Ort der Punkte B_1 ein Kegelschnitt k_1, der durch die drei Relativpole R^{12}, R^{13}, R^{23} geht[1]) und daher bestimmt ist, wenn wir zu zwei beliebigen Punkten A_1 der Geraden g_1 die zwei entsprechenden Punkte B_1 aufgesucht haben, da sich aus fünf gegebenen Punkten der Kegelschnitt konstruieren läßt.

Wir ermitteln nun zunächst den geometrischen Ort a_1 der Punkte A_1, für die in der Lage 1 der Ebenen P und Q der geforderte Geschwindigkeitszustand erzielt wird, und suchen dann auf der Kurve a_1 die Punkte A_1 so zu bestimmen, daß auch in der Lage 2 die bezüglich der Geschwindigkeit gestellte Forderung erfüllt wird. Wir ziehen in der Ebene P_1 eine beliebige Gerade g_1 durch den Momentanpol Π_{P1} und ermitteln den dieser Geraden zugeordneten Kegelschnitt k_1 in der Ebene Q_1, indem wir zum Punkte Π_{P1} und zu einem beliebigen zweiten Punkte D_1 der Geraden g_1 die entsprechenden zwei Punkte G_1 bezw. H_1 der Ebene Q_1 aufsuchen und durch diese sowie die Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} den Kegelschnitt legen (Abb. 20). Dann wählen wir auf g_1 eine Reihe von Punkten A_1, bestimmen auf k_1 die entsprechenden Punkte B_1 und ermitteln mit Hilfe der Größe λ_1 auf den Strahlen $\Pi_{Q1}\,B_1$ in der oben angegebenen Weise die Punkte V_{B1} und $V_{B'1}$, die je eine Kurve β bezw. β' bilden, welche sich in dem gesuchten Punkte $V_{B1}{}^0$ schneiden. Die Gerade $\Pi_{Q1}\,V_{B1}{}^0$ schneidet den Kegelschnitt k_1 in dem Punkte $B_1{}^0$, zu dem man auf g_1 den entsprechenden Punkt $A_1{}^0$ findet, indem man durch $B_1{}^0$ zu $V_{B1}{}^0\,\Pi_{P1}$ die Parallele zieht. Wendet man dieses Verfahren wiederholt an, so erhält man in der Ebene P_1 auf jeder durch Π_{P1} gelegten Geraden einen Punkt $A_1{}^0$. Hierbei ist zu beachten, daß die sämtlichen Kegelschnitte, die in der Ebene Q_1 dem Geradenbüschel durch Π_{P1} der Ebene P_1 entsprechen, durch vier Punkte gehen und zwar durch R^{12}, R^{13}, R^{23} und denjenigen Punkt G_1 der Ebene Q_1, der dem Punkte Π_{P1} der Ebene P_1 entspricht. Die gefundenen Punkte $A_1{}^0$ bilden eine der Ebene Q_1 angehörende Kurve, die den oben definierten Ort a_1 darstellt. Zu a_1 zeichnen wir die homologe (kongruente) Kurve a_2 in der Ebene P_2 und suchen zu einer Reihe von Punkten A_2 der Kurve a_2 die zugeordneten Punkte B_2 der Ebene Q_2 auf. In der gleichen Weise, wie es oben angegeben wurde, ermitteln wir unter Benutzung der Momentanpole Π_{P2} und Π_{Q2} sowie des gegebenen Winkelgeschwindigkeitsverhältnisses λ_2 zu jedem Punktpaare A_2, B_2 je einen Punkt V_{B2} und einen Punkt V_{B2}' und erhalten hierbei wieder zwei Kurven β und β', die sich in demjenigen Punkte $V_{B2}{}^0$ schneiden, durch den dann die gesuchten Gelenkpunkte A_2 und B_2 bestimmt sind. Wenn man die Ebenen P und Q in diesen Punkten durch eine dritte Ebene S gelenkig miteinander verbindet, so werden hierbei die gestellten Forderungen erfüllt, indem die drei Lagen P_1, P_2, P_3 der Ebene P den Lagen Q_1, Q_2, Q_3 der Ebene Q zugeordnet sind und das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten beider Ebenen in den Lagen 1 und 2 die vorgeschriebenen Werte λ_1 bezw. λ_2 besitzt.

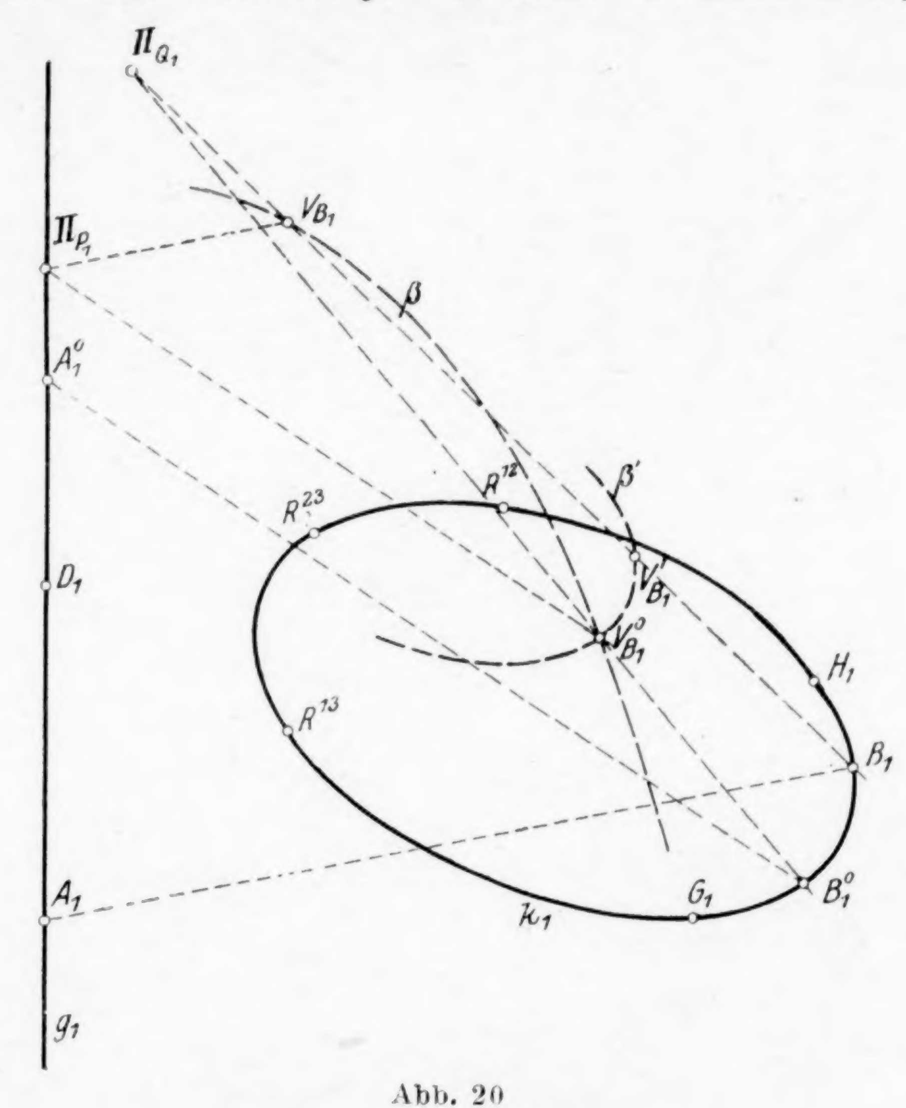


Abb. 20

[1]) Hierüber vergl. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 605.

6. Die Forderung von Totlagen. Sind zwei Ebenen P und Q durch eine dritte Ebene S in den Punkten A bezw. B gelenkig verbunden, so nennen wir diejenigen Lagen der Ebene Q, in denen sie sich während der Bewegung der Ebene P in Ruhe befindet, ihre Totlagen. Wenn mehrere zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q gegeben sind, wobei die Ebene Q in ein oder zwei dieser Lagen sich in Totlagen befinden soll, so erkennt man unmittelbar, daß die Konstruktion der gesuchten Gelenkpunkte A und B dieselbe bleibt wie im vorigen Abschnitte, wenn man dort das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten $\lambda = \omega_{Q1} : \omega_{P1}$ gleich Null setzt.

Wenn vier Lagen der Ebenen P und Q einander zugeordnet werden sollen und die Lage Q_1 eine Totlage sein soll, so zeichnet man zunächst wieder die beiden Mittelpunktkurven m bezw. (m) in den Ebenen Q_1 bezw. P_1 und bestimmt dann die Kurve β der Punkte V_{B1}. Der Punkt, in dem diese Kurve β die Mittelpunktkurve m schneidet, ist der gesuchte Gelenkpunkt B_1 der Ebene Q_1. Sind nur drei Lagen der Ebenen P und Q vorgelegt, wobei die Ebene Q in den Lagen Q_1 und Q_2 Totlagen haben soll, so zeichnen wir in der Ebene P_1 das Geradenbüschel durch den Momentanpol Π_{P1} und das zugeordnete Kegelschnittbüschel in der Ebene Q_1. Zu jedem der Kegelschnitte zeichnen wir die Kurve der Punkte V_{B1}, die den ersteren in einem Punkte B_1^0 schneidet, und finden hierdurch für die Punkte B_1^0 eine Kurve b_1^0. Zu dieser zeichnen wir in der Ebene Q_2 die homologe (kongruente) Kurve b_2^0. Wir ermitteln dann zu einer Reihe von Punkten B_2^0 der Kurve b_2^0 die entsprechenden Punkte A_2^0 der Ebene P_2 und konstruieren die zugehörige Kurve β der Punkte V_{B2}. Diese Kurve β schneidet die Kurve b_2^0 in dem gesuchten

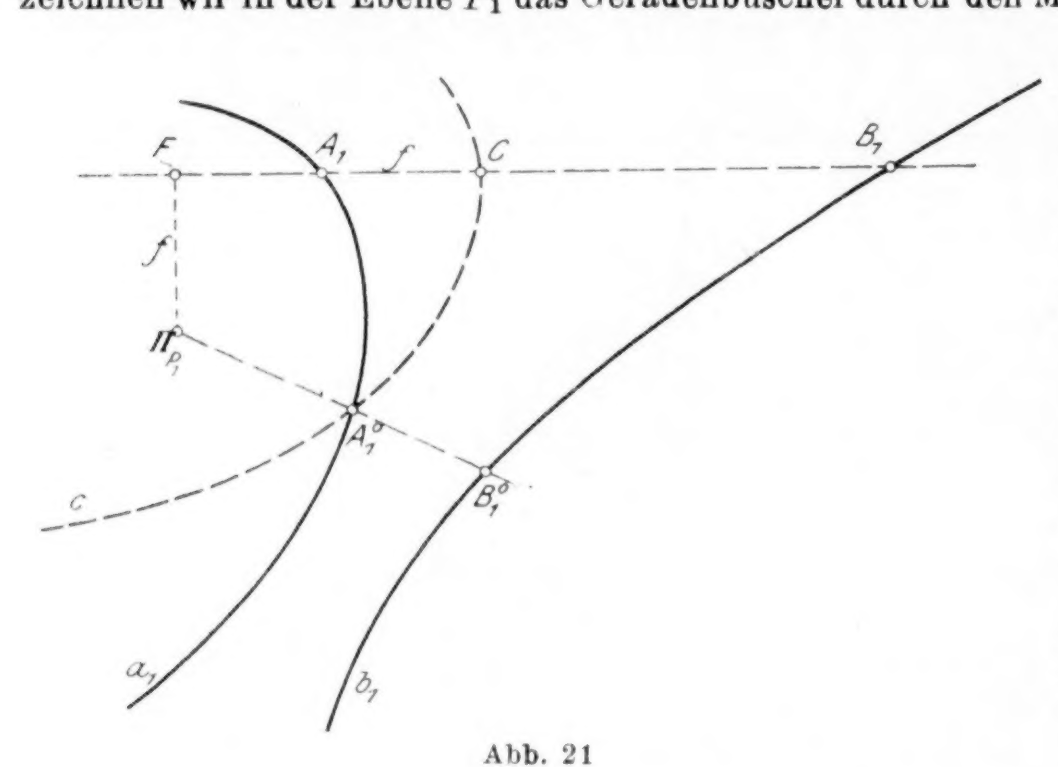


Abb. 21

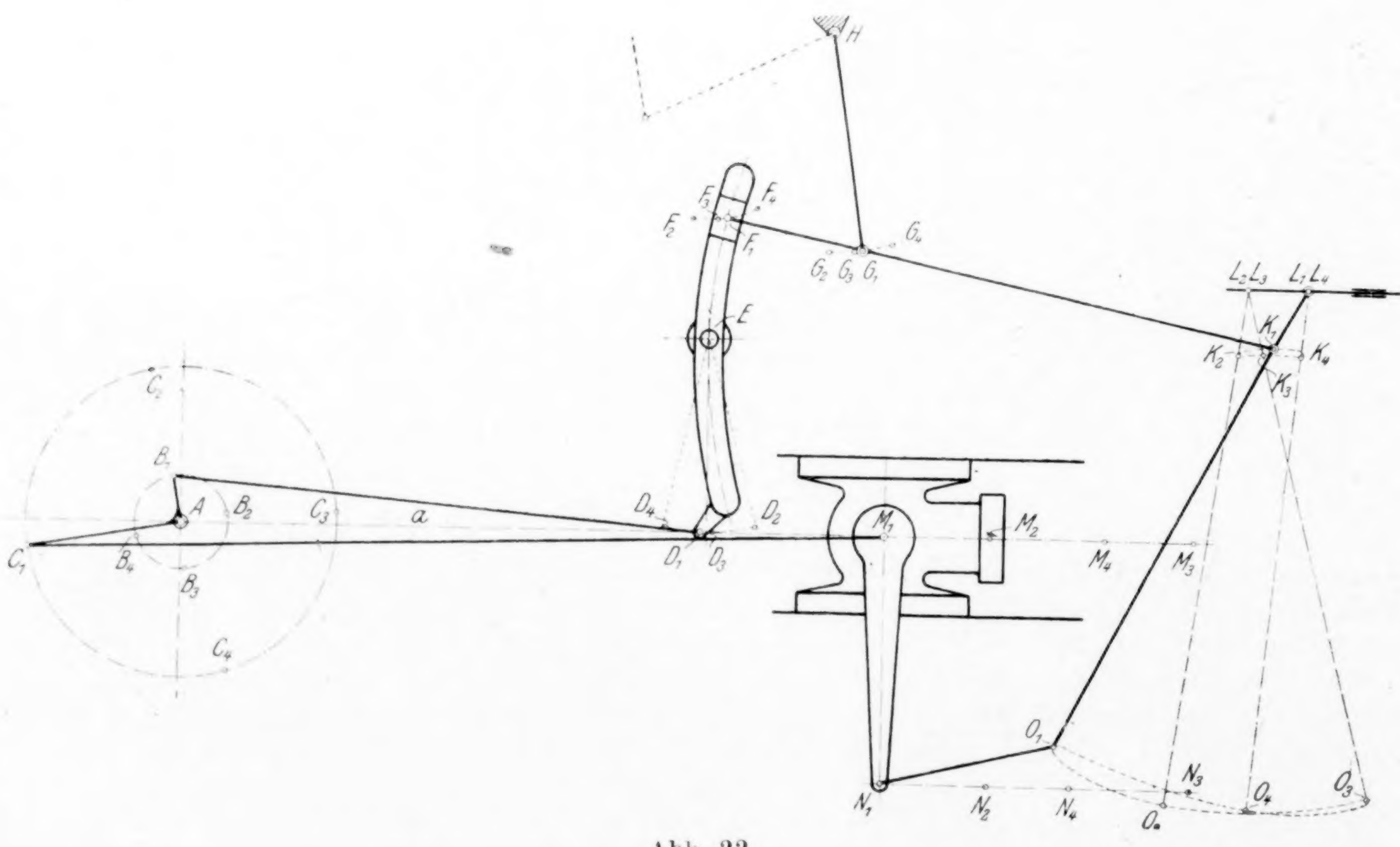


Abb. 22

Gelenkpunkte B_2 der Ebene Q_2, durch den dann der Gelenkpunkt A_2 der Ebene P_2 und damit die Ebene S bestimmt ist.

Eine andre Konstruktion der Totlagen folgt daraus, daß, wenn Q_1 eine Totlage sein soll, die Punkte B_1, A_1 und der Momentanpol Π_{P1} in einer Geraden liegen müssen. Wenn die geometrischen Oerter der Punkte A_1 und B_1, die Kurven a_1 bezw. b_1, ermittelt sind, so legt man durch je zwei zusammengehörige Punkte A_1 und B_1 eine Gerade und fällt auf diese vom Momentanpol Π_{P1} der Ebene P_1 das Lot $\Pi_{P1} F = f$ (Abb. 21). Dann trägt man auf der Geraden $A_1 B_1$ die Strecke $A_1 C = f$ auf und erhält als geometrischen Ort der Punkte C unter Berücksichtigung des Richtungssinnes der Lote eine Kurve c, welche die Kurve a_1 in dem gesuchten Gelenkpunkte $A_1{}^0$ schneidet. Den andern Gelenkpunkt $B_1{}^0$ findet man dann als Schnittpunkt der Geraden $\Pi_{P1} A_1{}^0$ mit der Kurve b_1.

7. Untersuchungen an der Heusingersteuerung. Um zu zeigen, in welcher Weise sich die Ergebnisse der vorliegenden Betrachtungen in praktischen Fällen anwenden lassen, sollen zunächst einige Untersuchungen an der Dampfmaschinenumsteuerung von Heusinger von Waldegg durchgeführt werden. Es ist jedoch nicht beabsichtigt, hier auf die Steuerung als solche näher einzugehen, sondern es sollen an dem Beispiele der Heusingersteuerung einige Fragestellungen erörtert werden, die von allgemeiner Bedeutung für die Konstruktion von Mechanismen bezw. Getrieben sind.

Den Untersuchungen ist die in Abb. 22 schematisch dargestellte Steuerung zugrunde gelegt, bei der für alle Stangen winkelrechte Mittellage angenommen und eine als normal gegebene Füllung von 35 vH eingestellt ist. Es wurden die vier Lagen Voreinströmen, Expansion, Vorausströmen und Kompression durch ein Müllersches Schieberdiagramm ermittelt und entsprechend durch die Marken 1, 2, 3 bezw. 4 kenntlich gemacht. Die Bahnen der Gelenkpunkte sind in Abb. 22 eingezeichnet, um die Bewegungsvorgänge deutlicher hervortreten zu lassen.

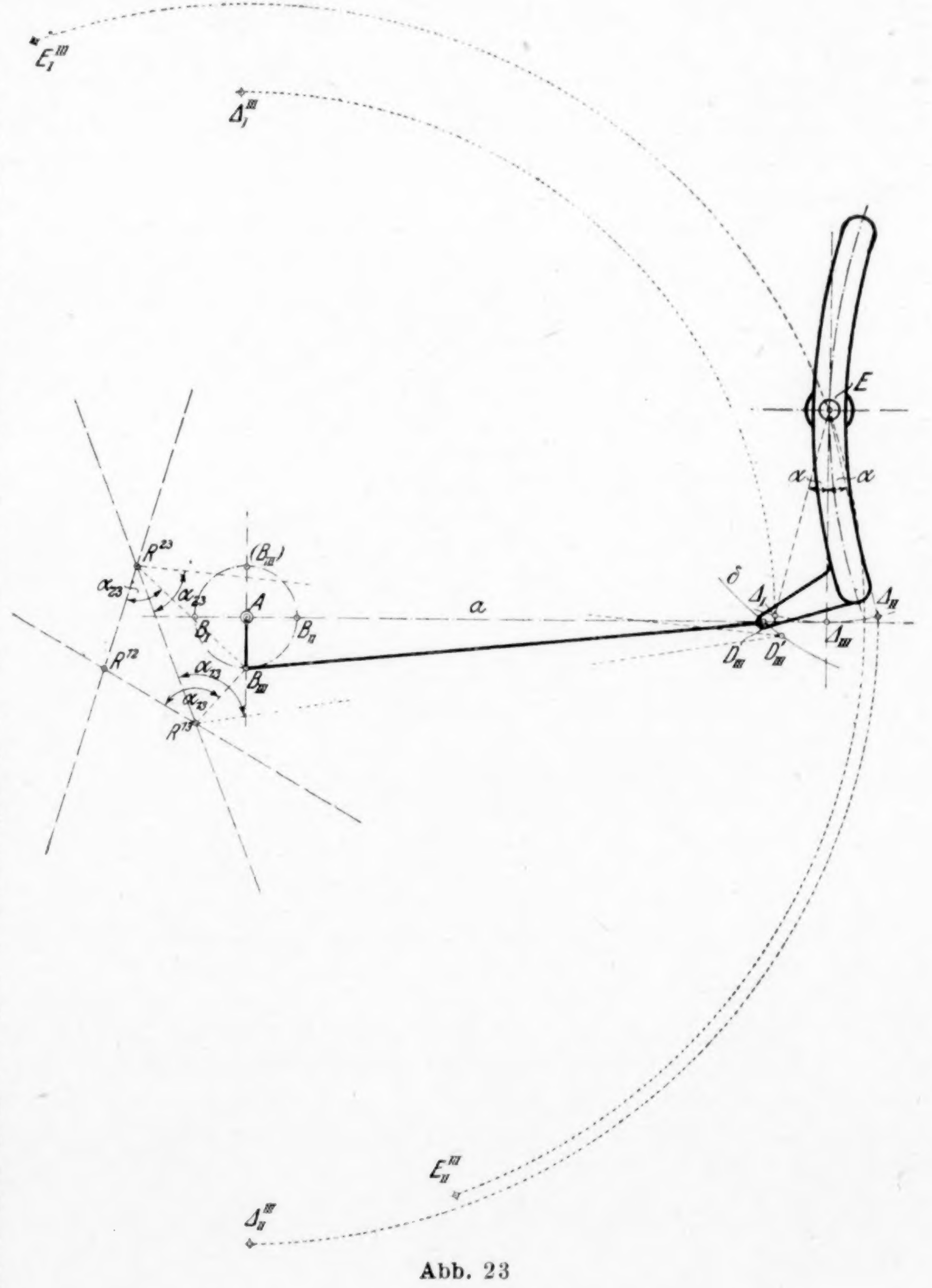


Abb. 23

a) Der Antrieb der Kulisse. Die Kulisse, die sich um den festen Punkt E dreht, wird durch die um A (die Kurbelwelle) drehbare Exzenterkurbel AB mittels der Exzenterstange BD angetrieben. Damit, wie verlangt wird, den beiden vertikalen Stellungen AB_{III} und $A(B_{III})$ der Exzenterkurbel die gleiche Stellung der Kulisse entspricht, muß die zugeordnete Lage D_{III} des Punktes D der

Kulisse auf der Geraden a liegen, die der Kreuzkopfmittelpunkt M beschreibt (Abb. 23). Das Bestreben, die Dampfverteilung zu verbessern, führt auf die Forderung, den Kulissengelenkpunkt D so zu bestimmen, daß der den beiden horizontalen Stellungen AB_I und AB_{II} der Exzenterkurbel zugeordnete Kulissendrehwinkel $D_I E D_{II}$ durch die dem Punkte B_{III} entsprechende Lage ED_{III} halbiert wird. Es handelt sich hier um ein Gelenkviereck $ABDE$ mit den Festpunkten A und E, bei dem je drei Lagen der beiden Kurbeln AB und ED als einander zugeordnet und ferner der Gelenkpunkt B der einen Kurbel gegeben sind. Dann ist der Gelenkpunkt D der Kulisse eindeutig bestimmt, so daß die weitere Forderung, daß die Mittellage D_{III} von D auf der Geraden a liegen soll, nur erfüllt werden kann, wenn man z. B. den Kulissendrehwinkel $D_I E D_{II}$ nicht als gegeben annimmt. Man verfährt nun folgendermaßen. Für einen beliebigen Kulissendrehwinkel $D_I E D_{II} = 2\,\alpha$ ermittelt man die relativen Lagen der Kulisse gegen die Mittelstellung der Exzenterkurbel AB_{III}. Zu diesem Zwecke wählen wir auf der Kulisse einen beliebigen Punkt $\varDelta$ mit seinen drei Lagen $\varDelta_I, \varDelta_{II}, \varDelta_{III}$ (Abb. 23) und ermitteln die Punkte $\varDelta_I{}^{III}$, $\varDelta_{II}{}^{III}$ sowie $E_I{}^{III}$, $E_{II}{}^{III}$ als dritte Eckpunkte von Dreiecken, indem wir $B_{III} A \varDelta_I{}^{III} \cong B_I A \varDelta_I$, $B_{III} A \varDelta_{II}{}^{III} \cong B_{II} A \varDelta_{II}$, $B_{III} A E_I{}^{III} \cong B_I A E$, $B_{III} A E_{II}{}^{III} \cong B_{II} A E$ machen. Die Mittelsenkrechten zu $E_I{}^{III} E_{II}{}^{III}$ und $\varDelta_I{}^{III} \varDelta_{II}{}^{III}$ schneiden sich im Pole R^{12}; entsprechend ergeben sich die Pole R^{13} bezw. R^{23} als Schnittpunkte der Mittellote zu $EE_I{}^{III}$ und $\varDelta_{III} \varDelta_I{}^{III}$ bezw. $EE_{II}{}^{III}$ und $\varDelta_{III} \varDelta_{II}{}^{III}$. Die Winkel α_{13} und α_{23}, die $B_{III} R^{13}$ bezw. $B_{III} R^{23}$ mit $R^{13} R^{12}$ bezw. $R^{23} R^{12}$ bilden, trägt man an $R^{13} R^{23}$ in R^{13} bezw. R^{23} an und erhält als Schnittpunkt der beiden freien Schenkel den Punkt D_{III}', der als Gelenkpunkt der Kulisse in ihrer Mittelstellung die Eigenschaft hat, daß er mit den beiden äußeren Kulissenstellungen die gleichen Winkel α einschließt. Wiederholt man das angegebene Verfahren für einige andre Werte von α, so ergeben sich entsprechende Punkte D_{III}', die eine Kurve δ bilden. Der Schnittpunkt D_{III} dieser Kurve δ mit der Geraden a ist dann der gesuchte Kulissengelenkpunkt und $B_{III} D_{III}$ ist die Länge der Exzenterstange. Wie die Konstruktion (Abb. 23) zeigt, muß, um die oben angegebene Forderung zu erfüllen, der Kulissengelenkpunkt um eine gewisse Strecke nach der Kurbel hin verlegt werden. Dieses Ergebnis stimmt mit dem von Pfitzner[1]) gefundenen überein, der jedoch den Punkt D nur durch Probieren ermittelt.

b) Die Aufhängung der Kulissenstange. Wie die bereits erwähnten Untersuchungen von Pfitzner ergeben haben, muß zur Erzielung einer gleichförmigen Dampfverteilung auf Kurbel- und Deckelseite des Zylinders danach gestrebt werden, daß bei einer bestimmten, z. B. der normalen, Füllungseinstellung der Kulissenstein während der Bewegung der Steuerung sich nicht gegen die Kulisse verschiebt, d. h. daß die den gegebenen vier Stellungen des Mechanismus entsprechenden vier Lagen des Gelenkpunktes F des Kulissensteins auf einem Kreise um den Kulissendrehpunkt E liegen. Die in Abb. 22 eingezeichnete Bahn des Punktes F zeigt deutlich die Abweichung von der Kreisbahn und daher die Unvollkommenheit der gezeichneten Steuerung. Die angegebene Forderung läßt sich bei richtiger Wahl des Aufhängepunktes G der Kulissenstange FK erfüllen. In diesem Falle werden die vier Lagen des Punktes F entsprechend den zugeordneten Exzenterstellungen auf einem Kreise um E gewählt. Die zugehörigen Lagen des Endpunktes K der Kulissenstange sind dann, falls die Längen KL und FK als gegeben angesehen werden, durch die vier Schieberstellungen, d. h. die Lagen des Punktes L, bestimmt. Damit sind die vier Lagen der Kulissenstange FK als bekannt zu betrachten, und es handelt sich nun um die Aufgabe, diejenigen Punkte in der Ebene der Kulissenstange zu ermitteln, deren vier entsprechende Lagen auf einem Kreise liegen. Diese Punkte würden dann als Aufhängepunkte verwendet werden können.

Da die vier Lagen der Kulissenstange nach Abb. 22 zu wenig voneinander abweichen und daher kein deutliches Bild der Konstruktion ergeben, wird in Abb. 24 ein Beispiel mit anderen Abmessungen, jedoch im übrigen den gleichen Bedingungen, vorgeführt. Es sind vier Lagen einer Ebene FK in der Weise gegeben, daß die vier homologen Lagen des Punktes F auf einem Kreise um den Punkt E liegen, während die vier entsprechenden Lagen des Punktes K beliebig gewählt seien. Man ermittelt hier die sechs Pole $P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14}, P^{24}, P^{34}$, die zu den vier Lagen der Ebene FK gehören und zeichnet dann für eine der vier Lagen, z. B. für die Lage 1, die Kreispunkt-

[1]) Pfitzner, Untersuchungen an der Heusingersteuerung, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 481 u. f.

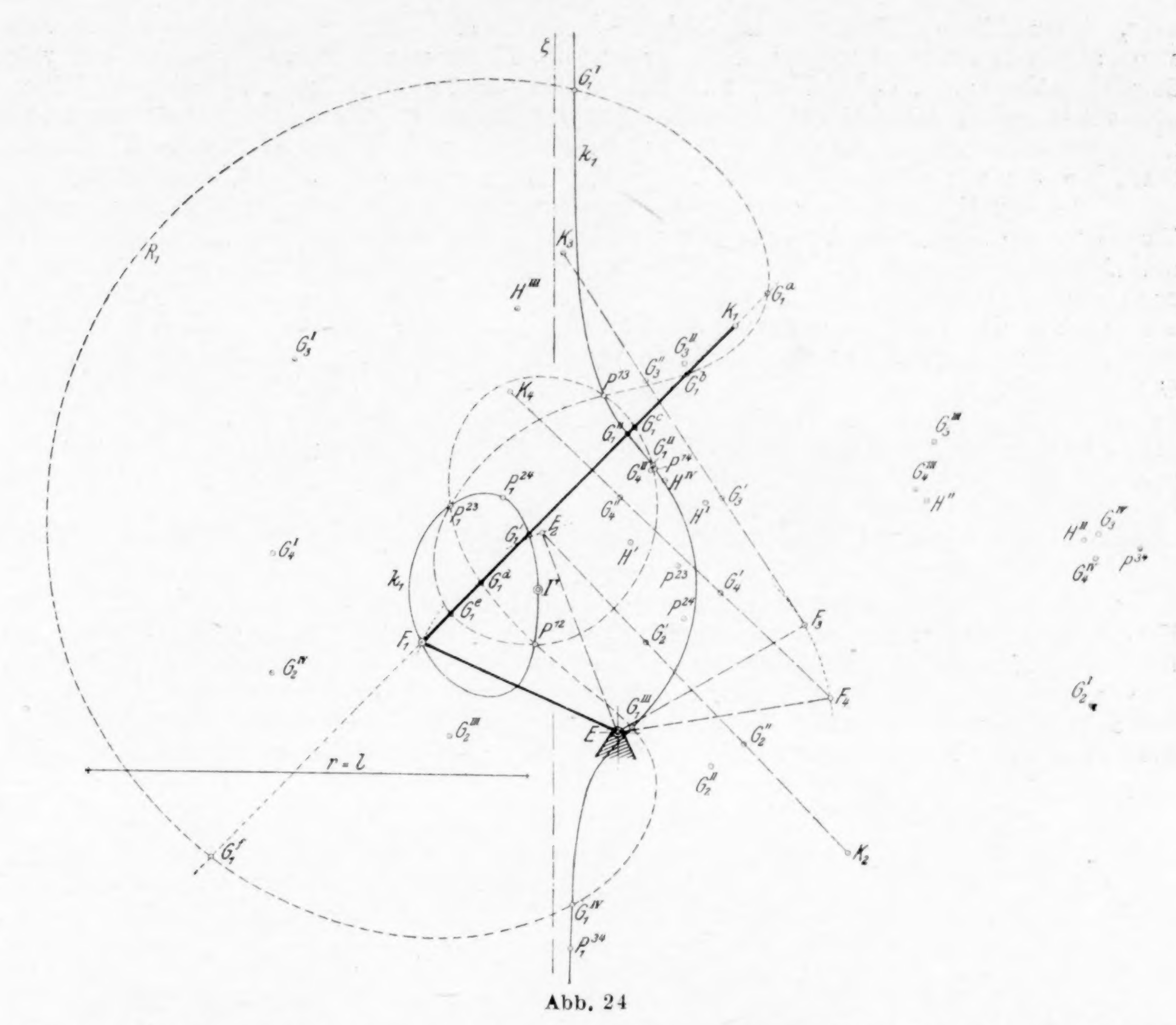


Abb. 24

kurve k_1, die dann in der Lage 1 der Ebene FK der geometrische Ort aller Punkte ist, deren vier homologe Lagen auf einem Kreise liegen, und die daher bei der Heusingersteuerung als Aufhängepunkte der Kulissenstange in Betracht kommen. Um den Aufhängepunkt auf der Kurve k_1 festzulegen, kann man noch eine Annahme machen bezw. noch eine weitere Forderung erfüllen. Verlangt man z. B., daß der Aufhängepunkt auf der Geraden FK liegt, so findet man ihn als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve k_1. Von den drei Schnittpunkten, die sich hierbei ergeben, ist der eine der gegebene Punkt F_1, während die beiden anderen G_1' und G_1'', die mit ihren entsprechenden Punkten G_2', G_3', G_4' bezw. G_2'', G_3'', G_4'' auf je einem Kreise um H' bezw. H'' liegen, als Aufhängepunkte dienen können. Wenn dagegen eine bestimmte Länge l der Aufhängestange GH vorgeschrieben ist, so zeichnet man in der Lage 1 der Ebene FK für drei der vier Lagen die R_1-Kurve für den Wert $r = l$. Diese schneidet im Falle der Abb. 24 die Kreispunktkurve k_1 in vier reellen Punkten G_1^{I}, G_1^{II}, G_1^{III}, G_1^{IV}, von denen jeder mit seinen drei homologen Punkten G_2^{I}, G_3^{I}, G_4^{I} bezw. G_2^{II}, G_3^{II}, G_4^{II} bezw. G_2^{III}, G_3^{III}, G_4^{III} bezw. G_2^{IV}, G_3^{IV}, G_4^{IV} auf je einem Kreise vom gleichen vorgeschriebenen Radius l

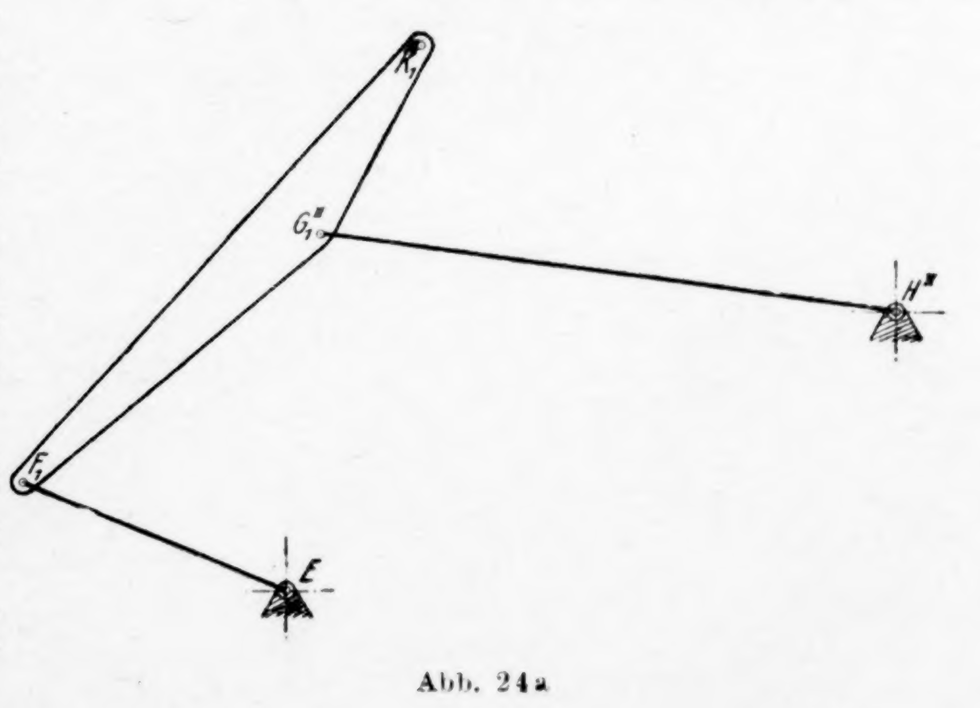


Abb. 24a

liegt, deren Mittelpunkte mit H^{I}, H^{II}, H^{III} bezw. H^{IV} bezeichnet sind. Führt man also, abgesehen von dem auf dem Kreise um E bewegten Punkt F, einen der vier Schnittpunkte, z. B. G^{II} (Abb. 24a) auf einem Kreise um den zugehörigen Mittelpunkt H^{II}, so ist die Bedingung erfüllt, daß der Punkt K bei der Bewegung des erhaltenen Gelenkviereckes $EFGH$ die vier vorgeschriebenen Lagen K_1, K_2, K_3, K_4 durchläuft, die den ebenfalls gegebenen Lagen F_1, F_2, F_3, F_4 des Punktes F entsprechen.

Bei der Heusingersteuerung wird es wegen der Kürze des von F zurückgelegten Weges in der Regel genügen, wenn man nur drei Lagen des Punktes F auf dem Kreise um E annimmt, etwa die beiden Totlagen und eine mittlere Lage. Demgemäß seien auch drei zugeordnete Lagen des Punktes K vorgelegt, so daß drei Lagen der Ebene FK als gegeben angenommen werden können. Hier darf man, um den Aufhängepunkt G zu bestimmen, noch zwei weitere Annahmen machen. Wählt man z. B. den Aufhängepunkt G willkürlich, so ergibt sich der Punkt H als Mittelpunkt des Kreises durch die drei entsprechenden Lagen G_1, G_2, G_3, wobei die Länge der Aufhängestange GH der Radius dieses Kreises ist. Wenn dagegen die Aufhängestange GH eine gegebene Länge l haben soll und ferner gefordert wird, daß der Aufhängepunkt G auf der Geraden FK liegt, so ermittelt man die sechs Schnittpunkte G_1^a, G_1^b, G_1^c, G_1^d, G_1^e, G_1^f dieser Geraden mit der in der Lage 1 für $r = l$ gezeichneten R_1-Kurve. Jeder der sechs Schnittpunkte kann als Aufhängepunkt benutzt werden (Abb. 24).

c) Der Steuerungsantrieb seitens des Kreuzkopfes. Die Bewegung des Kreuzkopfes wird durch die Kreuzkopfschwinge NO und die Stange OL, die ihrerseits im Punkte K von der Kulissenstange FK angetrieben wird, auf den Schieber übertragen, dessen Bewegung mit der des Punktes L identisch ist. Für eine bestimmte Füllung sei die Schieberbewegung, d. h. die Bewegung des Punktes L und ferner die von der Kulisse abgeleitete Bewegung des Punktes K gegeben, so daß die Bewegung der Stange KL

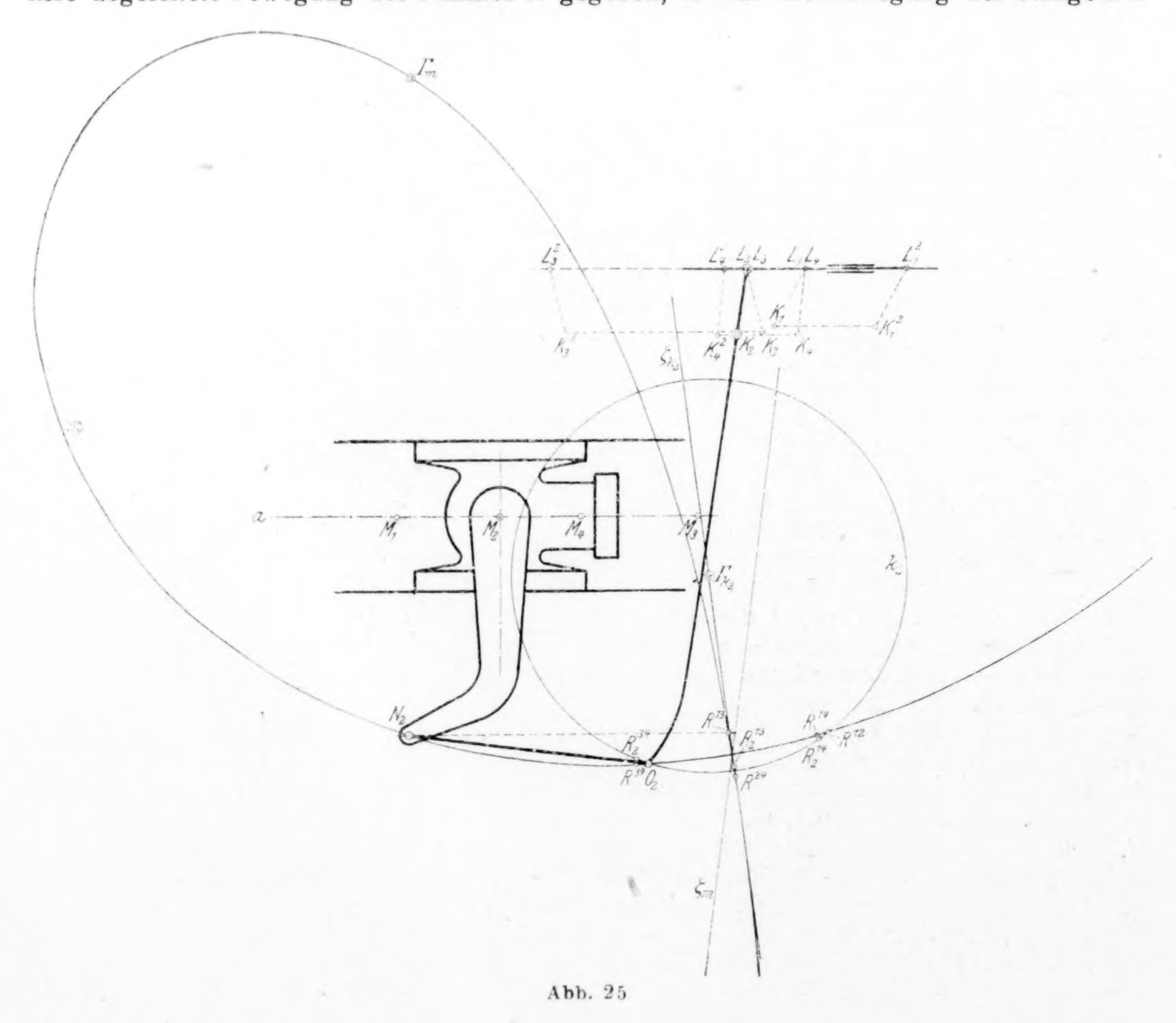


Abb. 25

in ihrer Zuordnung zu der gegebenen Kreuzkopfbewegung als bekannt angesehen werden darf. Die vier Lagen Voreinströmen (1), Expansion (2), Vorausströmen (3) und Kompression (4) der Stange KL und des Kreuzkopfes M seien für die geforderte Füllung bestimmt. Gesucht werden die durch die Kreuzkopfschwinge NO verbundenen Gelenkpunkte N und O.

Man ermittelt die relativen Lagen der Stange KL gegen eine bestimmte Lage des Kreuzkopfes. Die Konstruktion, die in Abb. 25 für die Lage 2 durchgeführt ist, wird hier besonders einfach, da der Kreuzkopf eine geradlinige Schiebung vollzieht. Infolgedessen ergeben sich die relativen Lagen $L_1{}^2$, $L_3{}^2$, $L_4{}^2$ bezw. $K_1{}^2$, $K_3{}^2$, $K_4{}^2$ der Punkte L bezw. K gegen die Kreuzkopflage M_2 durch Verschieben parallel der Geraden a um die Strecken $L_1L_1{}^2 = K_1K_1{}^2 = M_1M_2$, $L_3L_3{}^2 = K_3K_3{}^2 = M_3M_2$, $L_4L_4{}^2 = K_4K_4{}^2 = M_4M_2$. Für die gefundenen relativen Lagen $K_1{}^2L_1{}^2$, K_2L_2, $K_3{}^2L_3{}^2$, $K_4{}^2L_4{}^2$ der Stange KL konstruiert man nun die sechs Pole R^{12}, R^{13}, R^{23}, R^{14}, R^{24}, R^{34} als Schnittpunkte von Mittelsenkrechten und zeichnet die Mittelpunktkurve m (Mittellinie ζ_m und Hauptbrennpunkt Γ_m), die in der Kreuzkopfebene den geometrischen Ort aller Punkte N_2 darstellt. Ferner konstruiert man in der Lage L_2K_2 der Stange LK die Kreispunktkurve k_2 (Mittellinie ζ_{k2} und Hauptbrennpunkt Γ_{k2}). In dem in Abb. 25 gezeichneten Falle zerfällt die Kreispunktkurve in ihre Mittellinie ζ_{k2} und einen Kreis um Γ_{k2}. Sie stellt in der Ebene der Stange K_2L_2 den geometrischen Ort aller Punkte O_2 dar. Jedem Punkte N_2 der Mittelpunktkurve m entspricht eindeutig ein Punkt O_2 der Kreispunktkurve k_2, wobei gegenüber dem Poldreieck $R^{12}R^{13}R^{23}$ die Punkte N_2 und O_2 sich in der gleichen Weise entsprechen wie in Abb. 23 die Punkte B_{III} und D_{III}'. Wählt man also entweder auf m einen Punkt N_2 oder auf k_2 einen Punkt O_2, so sind damit alle Abmessungen des Mechanismus bestimmt. Man kann demnach noch eine, aber auch nur eine willkürliche Annahme machen, wobei die Kurven m und k_2 die Grundlage für die weiteren Erörterungen bilden.

Es sei verlangt, daß der Punkt N_2 auf einer gegebenen Geraden, z. B. auf einer Vertikalen durch M_2, liegen möge. Hier ergibt sich N_2 als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Mittelpunktkurve m. Ist dagegen die Länge MN vorgeschrieben, so findet man N_2 als Schnittpunkt des um M_2 mit MN geschlagenen Kreises mit der Kurve m. Wenn bezüglich des Punktes O Bedingungen gestellt sind, so benutzt man statt der Mittelpunktkurve m die Kreispunktkurve k_2. Soll z. B. O auf der Geraden LK liegen, so ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve k_2 der gesuchte Punkt O_2. Wenn O von L oder von K eine gegebene Entfernung haben soll, so findet man O_2 als Schnittpunkt der entsprechenden Kreise um L_2 bezw. K_2 mit der Kurve k_2.

Es werde gefordert, daß die Kreuzkopfschwinge in zwei Lagen, z. B. 1 und 3, nach oben bezw. unten den gleichen Ausschlagwinkel mit der Horizontalen einschließen soll. Hier hat man zu beachten, daß die Verbindungslinie des Poles R^{13} mit einem auf m beliebig gewählten Punkte N_2 die Mittelsenkrechte der zu N_2 gehörenden Punkte $O_1{}^2$ und $O_3{}^2$ ist, die auf einem Kreise um N_2 liegen. Hiernach erhält man den gesuchten Punkt N_2 als Schnittpunkt der Horizontalen durch R^{13} mit der Mittelpunktkurve m. Dieser Fall ist in Abb. 25 eingezeichnet.

Ist aus bestimmten Gründen die Länge l der Kreuzkopfschwinge NO vorgeschrieben, so konstruiert man für eins der vorhandenen Poldreiecke in der Lage 2, z. B. für $R^{12}R^{13}R^{23}$, die R_2-Kurve für den Wert $r = l = NO$ (Abb. 26), welche die Kreispunktkurve k_2 in O_2 schneidet. Es ergeben sich hier insgesamt vier Schnittpunkte O_2, O_2', O_2'' und O_2''', von denen man den am günstigsten gelegenen benutzt. Es kann ferner der Fall eintreten, daß noch eine beliebige fünfte Stellung des Schiebers und der Stange KL einer vorgeschriebenen Kreuzkopfstellung entsprechen soll. Hier zeichnet man die fünf relativen Lagen der Stange KL gegen eine der gegebenen Kreuzkopfstellungen und konstruiert dann zwei Mittelpunktkurven, z. B. für die Relativsysteme 1, 2, 3, 4 und 1, 2, 3, 5. Jeder der in Frage kommenden Schnittpunkte (im allgemeinen vier) beider Kurven kann als Gelenkpunkt N_2 der Kreuzkopfebene verwendet werden. Mitunter wird verlangt, daß der Schieber in einer der vier gegebenen Lagen sich möglichst schnell bewegen soll. Man bestimmt in diesem Falle zunächst auf den beiden Kurven m und k_2 eine Anzahl paarweise einander zugeordneter Punkte N_2 bezw. O_2 und konstruiert dann für jeden der hierdurch bestimmten Mechanismen die Schiebergeschwindigkeit. Innerhalb der durch konstruktive Rücksichten gegebenen Grenzen wählt man dann diejenigen Punkte N_2 und O_2, bei denen sich die größte Schiebergeschwindigkeit ergibt.

8. Untersuchungen an einer Wälzhebelsteuerung. Es soll eine Wälzhebelsteuerung für den Einlaß nach dem in Abb. 27a angegebenen Schema konstruiert werden, bei der die Wälzbank, die durch den Regler verstellt wird, bei einer bestimmten Füllung aber in Ruhe bleibt, als Wälzkurve eine Gerade besitzt, die bei der gegebenen Füllung gegen die Ventilspindel unter dem gegebenen Winkel α geneigt ist. Ferner sei die Lage Q der Steuerwelle gegeben und auf Grund eines Müllerschen Diagrammes der der vorgeschriebenen Füllung entsprechende Drehwinkel ψ der Steuerwelle ermittelt. Die Konstruktion ist in Abb. 27 dargestellt.

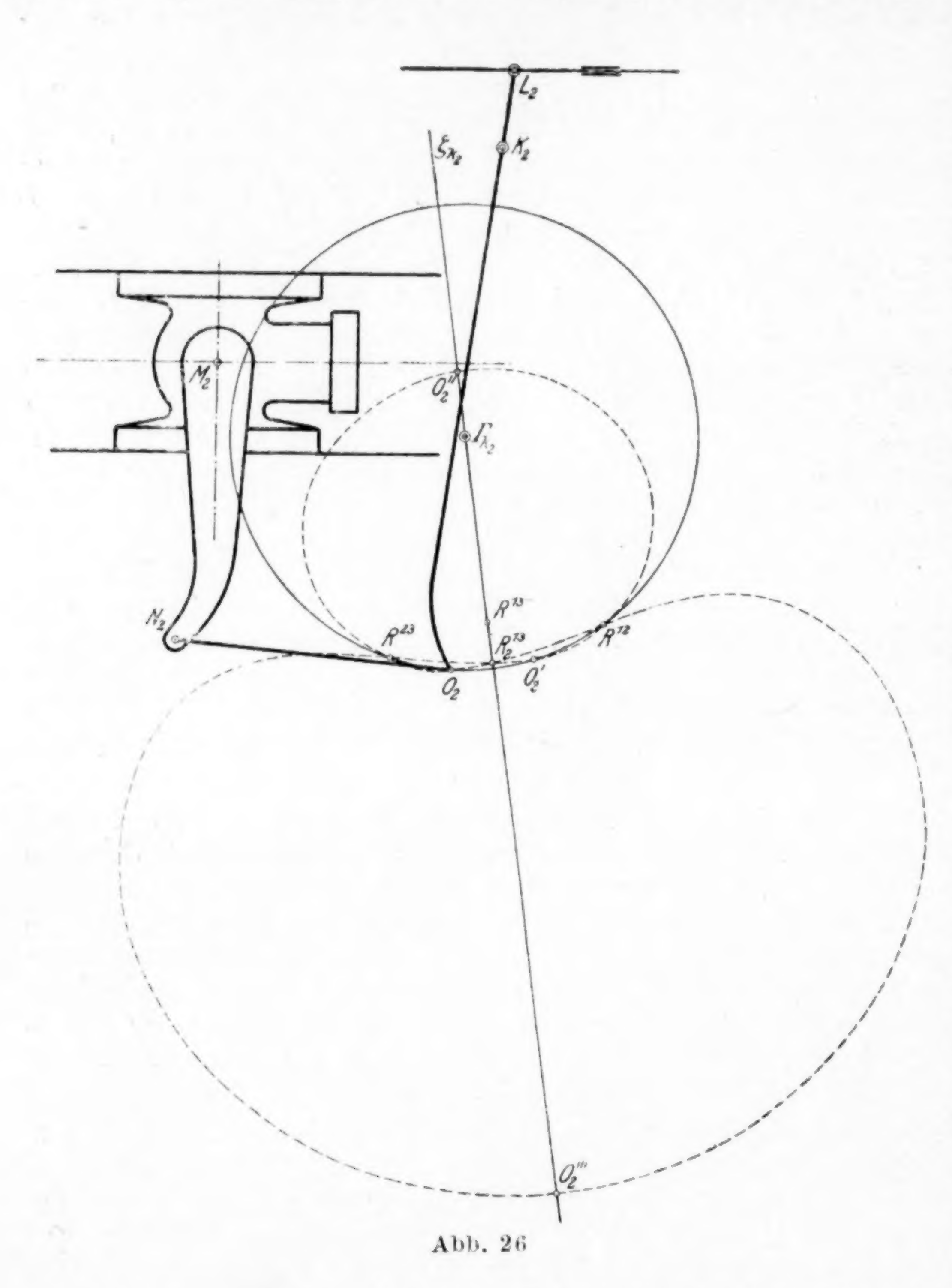


Abb. 26

Wenn reines Rollen erfolgen soll, so findet man bei geradliniger Wälzbankkurve für die Wälzhebelkurve eine logarithmische Spirale mit der Polargleichung

$$\varrho = z_0 \tan \alpha \, e^{(\varphi - \pi) \tan \alpha},$$

wobei der asymptotische Punkt der Kurve ($\varrho = 0$) der geradlinig geführte Punkt A und $z_0 \tan \alpha = a$ der nach konstruktiven Rücksichten zu wählende Abstand der Bahngeraden des Punktes A vom ersten Berührungspunkt beider Wälzkurven (bei aufgesetztem Ventil) ist. Für diese erste Stellung, in der der Ventilhubpunkt A sich in seiner tiefsten Lage A_1 befindet, konstruieren wir die Wälzhebelkurve h als logarithmische Spirale, durch die nun die Bewegung des Wälzhebels bestimmt ist. Ist für die vorgeschriebene Füllung der Ventilhub berechnet worden, so ist damit die oberste Lage A_3 des Punktes A gefunden. Bei Füllungsabschluß ist der Punkt A in die mit A_1 zusammenfallende Lage A_5 zurückgekehrt, wobei die beiden Strecken $A_1 A_3$ und $A_3 A_5$ in gleichen Zeiten durchlaufen werden mögen. Weiter verfährt man in der üblichen Weise, indem man das Geschwindigkeitzeitdiagramm des Punktes A annimmt, hieraus die entsprechenden Wegstrecken durch Integration ermittelt und dadurch das Wegzeitdiagramm für A findet, wobei dann der Zeichnungsmaßstab dadurch bestimmt ist, daß die Hälfte des gesamten von A zurückgelegten Weges gleich dem Ventilhub $A_1 A_3$ ist. Um den angenommenen Geschwindigkeitsverlauf möglichst genau zu verwirklichen, wählen wir in dem gefundenen Wegzeitdiagramm zwischen A_1 und A_3, sowie zwischen A_3 und A_5 noch je einen Punkt A_2 bezw. A_4, und zwar so, daß diesen beiden Punkten, die zusammenfallen mögen, Exzenterstellungen entsprechen, welche die Exzenterdrehwinkel der Perioden $A_1 A_3$ und $A_3 A_5$ halbieren. Durch die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 haben wir fünf Lagen des Wälzhebels bestimmt, die fünf gegebenen Lagen der Exzenterebene zugeordnet sind. Es sind nun die Gelenkpunkte C bezw. E des Wälzhebels bezw. der Exzenterkurbel so zu bestimmen, daß die angegebene Zuordnung durch eine starre Verbindung der Punkte C und E erzielt wird.

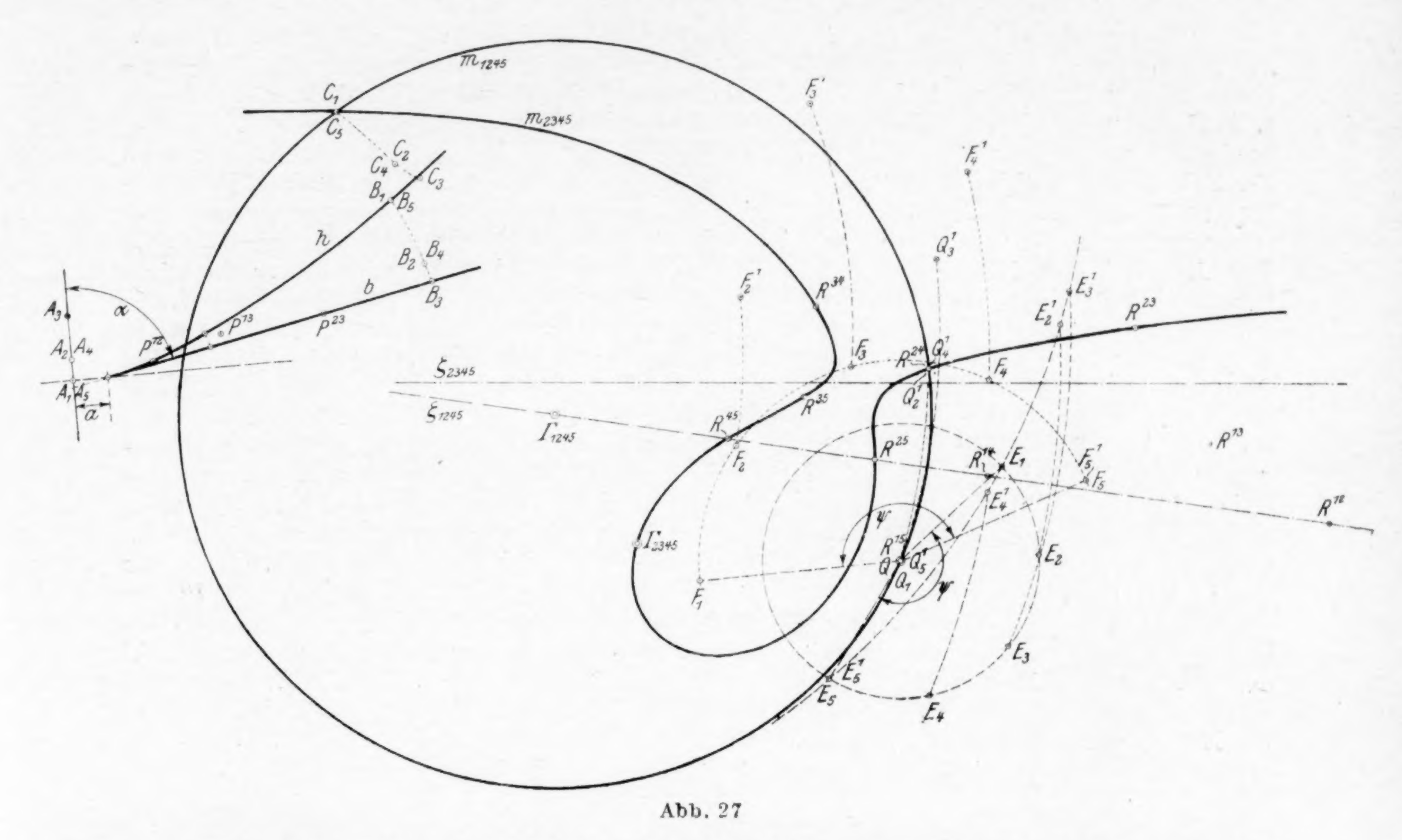


Abb. 27

Wir wählen auf dem Wälzhebel einen beliebigen Punkt B und ermitteln seine fünf Lagen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 in den fünf angenommenen Stellungen des Wälzhebels. Dann bestimmen wir die Pole der fünf Lagen des Wälzhebels, wobei sich z. B. P^{35} als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu $A_3 A_5$ und $B_3 B_5$ ergibt. Da hier die Lagen 1 und 5 sowie 2 und 4 des Wälzhebels zusammenfallen, so sind die Pole P^{15} und P^{24} völlig unbestimmt, während die Pole P^{12}, P^{14}, P^{25}, P^{45} bezw. P^{13}, P^{35} bezw. P^{23}, P^{34} in je einem Punkte zusammenfallen. In der Exzenterebene wählen wir einen beliebigen Punkt F und bestimmen seine fünf Lagen auf dem Kreise um Q so, daß den Punkten F_1 und F_5 der gegebene Exzenterwinkel ψ als Zentriwinkel entspricht und daß die Punkte F_2, F_3, F_4 den Kreisbogen $F_1 F_5$ in vier gleiche Teile teilen. Nun sind die relativen Lagen der Exzenterebene gegen die Lage 1 des Wälzhebels zu ermitteln. Hierbei ist zu beachten, daß im Punkte Q fünf Lagen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 des Punktes Q der Exzenterebene zusammenfallen. Wir drehen die Ebene $F_2 Q_2$ mit dem Pol P^{12} als Drehpunkt um den Winkel $A_2 P^{12} A_1$ in die Lage $F_2{}^1 Q_2{}^1$ und finden dadurch die Punkte $F_2{}^1$ und $Q_2{}^1$, welche die relative Lage der Exzenterebene 2 gegen die Wälzhebelstellung 1 bestimmen. In gleicher Weise ergeben sich die Punkte $F_3{}^1$ und $Q_3{}^1$, indem man die Ebene $F_3 Q_3$ um den Pol P^{13} mit dem Drehwinkel $A_3 P^{13} A_1$ dreht, ferner die Punkte $F_4{}^1$ und $Q_4{}^1$ durch Drehung um den

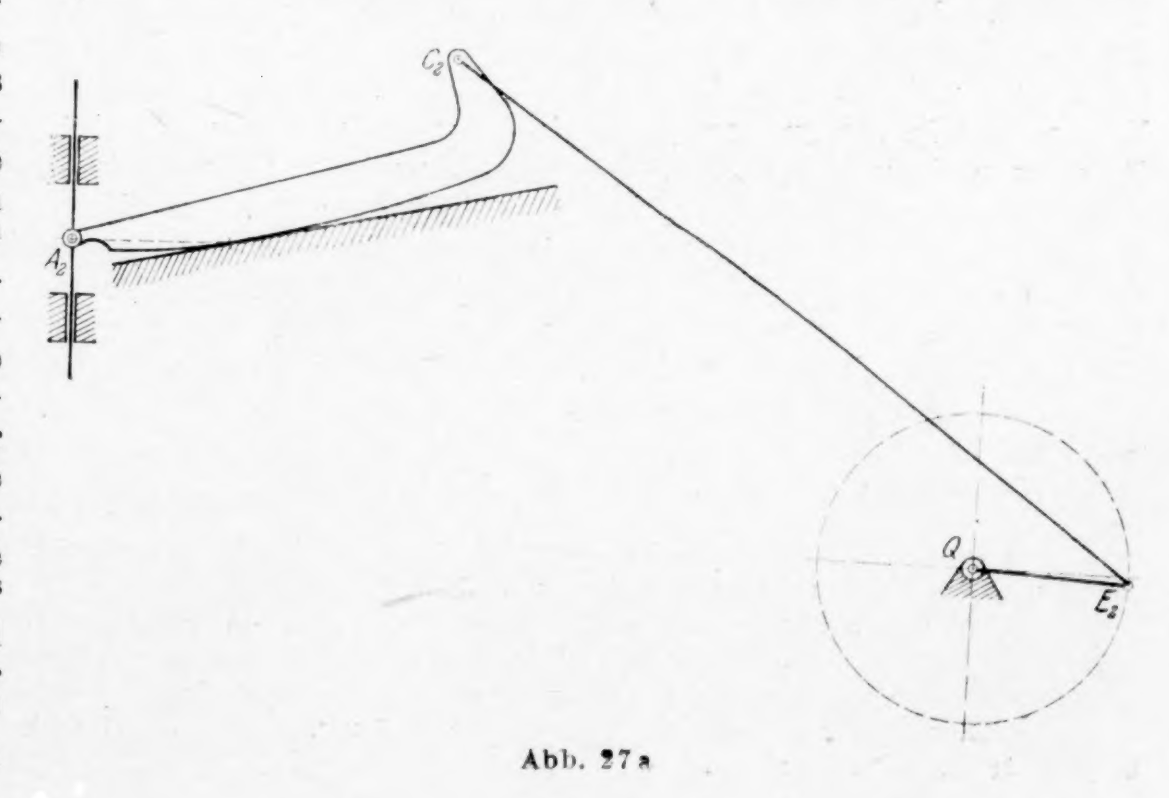


Abb. 27a

mit P^{12} zusammenfallenden Pol P^{14}. Die Punkte $Q_5{}^1$ und $F_5{}^1$ fallen mit Q bezw. F_5 zusammen. Für die nunmehr bestimmten fünf Relativlagen der Exzenterebene 2 gegen die Lage 1 des Wälzhebels suchen wir die zehn Pole $R^{12}, \ldots . R^{45}$ auf; z. B. findet man R^{23} als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu $Q_2{}^1 Q_3{}^1$ und $F_2{}^1 F_3{}^1$. Der gesuchte Exzentergelenkpunkt E muß nun die Eigenschaft haben, daß seine Relativlagen E_1, $E_2{}^1$, $E_3{}^1$, $E_4{}^1$, $E_5{}^1$ auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt die Lage C_1 des gesuchten Wälzhebelgelenkpunktes ist. Wir zeichnen zwei Mittelpunktkurven für die fünf relativen Lagen der Exzenterebene. In Abb. 27 sind die Mittelpunktkurven m_{2345} für die Pole R^{23}, R^{24}, R^{35}, R^{45} und m_{1245} für die Pole R^{12}, R^{14}, R^{25}, R^{45} gezeichnet. Da diese letzten vier Pole hier in einer Geraden liegen, so zerfällt die Mittelpunktkurve m_{1245} in einen Kreis und seinen durch R^{12}, R^{14}, R^{25}, R^{45} gehenden Durchmesser ζ_{1245}. Die beiden Mittelpunktkurven schneiden sich außer in den Polen R^{24}, R^{25}, R^{45} nur in zwei reellen Punkten, von denen der eine außerhalb des Zeichnungsraums liegt und nicht brauchbar ist, während der zweite der gesuchte Gelenkpunkt C_1 in der Wälzhebellage 1 ist. Für ein beliebiges Poldreieck, z. B. R^{12} R^{13} R^{23}, bestimmen wir diejenigen drei entsprechenden Punkte E_1, $E_2{}^1$, $E_3{}^1$, die auf einem Kreise um C_1 liegen. Dann ist E_1 der gesuchte Exzentergelenkpunkt in der Exzenterstellung 1, QE_1 ist die Länge der Exzenterkurbel und der Radius $C_1 E_1$ die Länge der Exzenterstange. Bestimmt man noch die Punkte $E_4{}^1$ und $E_5{}^1$, z. B. aus dem Poldreieck R^{34} R^{35} R^{45}, so liegen auch diese Punkte auf dem um C_1 mit $C_1 E_1$ geschlagenen Kreise. Durch Drehung des Punktes $E_2{}^1$ mit P^{12} als Drehpunkt um den Winkel $A_1 P^{12} A_2$ erhält man den Punkt E_2; ebenso findet man E_3, indem man $E_3{}^1$ um P^{13} um den Winkel $A_1 P^{13} A_3$ dreht, und E_4 durch Drehung von $E_4{}^1$ um P^{14}, während E_5 mit $E_5{}^1$ zusammenfällt. Die Punkte E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 liegen auf einem Kreise um Q und erfüllen die Forderung, daß $\sphericalangle E_1 Q E_5 = \psi$ ist und daß durch E_2, E_3, E_4 der Kreisbogen $E_1 E_5$ in vier gleiche Teile geteilt wird. In Abb. 27a ist die Steuerung schematisch für die Stellung 2 gezeichnet. 36

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Unstetige und mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen.[1]

Von **G. JAFFÉ** in Leipzig.

Es ist schon lange bekannt, daß die klassischen Gleichungen für die Bewegung reibungsloser Flüssigkeiten zu Folgerungen führen, die mit der Erfahrung nicht vereinbar sind. In voller Allgemeinheit läßt sich der folgende Satz beweisen[2]): ein fester Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit durch eine unbegrenzte, im Unendlichen ruhende, reibungslose Flüssigkeit bewegt, erfährt vonseiten der Flüssigkeit keinen Widerstand in seiner Bewegungsrichtung. Dieser Satz, der häufig als d'Alembertsches Paradoxon bezeichnet wird, ist ebensowenig mit der Erfahrung in Einklang, wie das Auftreten negativer Drucke, das die Theorie ergibt. In einer strömenden Flüssigkeit ist der Druck mit der Geschwindigkeit durch die Bernoullische Gleichung verknüpft, und überall dort, wo die Geschwindigkeit einen gewissen kritischen Wert übersteigt, also insbesondere in der Nachbarschaft von vorspringenden scharfen Ecken und Kanten, an denen die Geschwindigkeit über alle Grenzen wachsen muß, wird der Druck negativ.

Einen Weg, auf dem man beiden Schwierigkeiten entgeht, hat Helmholtz[3]) gewiesen. In seiner grundlegenden Arbeit über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen zeigt Helmholtz, daß man bei der Integration der hydrodynamischen Gleichungen stets

[1]) Dieser Bericht wurde in gekürzter Form am 20. September 1921 auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Jena vorgetragen.

[2]) In der ausgesprochenen Form ist der Satz von U. Cisotti, Atti R. Ist. Veneto (8) 8 1905/06, 1291 bis 1295, bewiesen. D'Alembert selbst hatte sein Paradoxon für Körper von gewisser Symmetrie ausgesprochen. D'Alembert, Opusc. Math., Paris 1761 bis 1780, Bd. 5, S. 132 bis 138.

[3]) H. v. Helmholtz, Monatsber. Akad. Berlin 1868, S. 215 bis 228. Wiss. Abh., Bd. 1, Leipzig 1882, S. 146 bis 157.

stillschweigend eine Voraussetzung gemacht hatte, die nicht im Wesen der Sache begründet liegt, nämlich die Annahme, daß die Geschwindigkeiten im Inneren der Flüssigkeit überall stetig sein müßten. Dagegen liegt nach Helmholtz »in der Natur einer tropfbaren Flüssigkeit, wenn wir sie als vollkommen flüssig, also der Reibung nicht unterworfen betrachten, kein Grund, daß nicht zwei dicht aneinander grenzende Flüssigkeitsschichten mit endlicher Geschwindigkeit aneinander vorbeigleiten könnten«.

Nimmt man demgemäß an, daß überall dort, wo sonst negative Drucke auftreten würden, die Flüssigkeit zerreißt und eine Trennungsfläche sich herstellt, so gelangt man zu Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen, die überall endliche Geschwindigkeit liefern und die auch für die beschleunigungslose Bewegung eines Körpers in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit einen nicht verschwindenden Widerstand ergeben. Helmholtz selbst hat das erste Beispiel einer unstetigen zweidimensionalen Flüssigkeitsbewegung der genannten Art gegeben und im Anschluß daran hat Kirchhoff[1]) ein allgemeines, sehr elegantes Verfahren entwickelt, das weitere Beispiele in beliebiger Zahl liefert.

Die Möglichkeit der Existenz von Helmholtzschen Trennungsschichten ist wiederholt in Zweifel gezogen worden — schon Helmholtz selbst hatte auf die mangelnde Stabilität solcher Schichten hingewiesen —, aber immer wieder hat der zugrunde liegende physikalische Gedanke Verteidiger gefunden, insbesondere dürfte Brillouin[2]) alles gesagt haben, wodurch sich die Helmholtzsche Auffassung stützen läßt. Es kann heutzutage als feststehend angesehen werden, daß die Helmholtz-Kirchhoffsche Theorie das Problem des Widerstandes umströmter Körper weder quantitativ, noch auch qualitativ vollständig löst. Das stromabwärts unbegrenzte Totwasser, das sich nach dieser Theorie hinter dem Körper ausbilden soll, entspricht nicht den Tatsachen und es steht fest, daß die Hauptursache für den Widerstand in Wirbelbildung hinter dem Hindernis zu suchen ist. Andrerseits liefert diese Theorie auch heute noch die einzige Methode, nach der Widerstände in reibungsloser Flüssigkeit auf rein theoretischem Wege überhaupt berechenbar sind.

Aber auch abgesehen davon kommt den unstetigen Flüssigkeitsbewegungen wegen ihrer Bedeutung für die Theorie der freien Strahlen ein großes Interesse zu. So hat auch diese Frage immer wieder zur theoretischen Behandlung angelockt, und insbesondere im Anschluß an eine wichtige Arbeit von Levi-Civita[3]), die der mathematischen Behandlung neue Wege wies, hat sich eine umfangreiche Literatur, meist italienischer und französischer Autoren, in den letzten 10 bis 15 Jahren gebildet. Es ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes über diese, zum Teil schwer zugänglichen und in Deutschland wenig bekannten Arbeiten, mit der sich daran anknüpfenden Frage nach der Mehrdeutigkeit der Lösungen, zusammenfassend zu berichten.

1. Die Kirchhoffsche Methode. Bevor auf die moderne Entwicklung des Problems eingegangen werden kann, wird es sich empfehlen, kurz die wesentlichen Züge der Kirchhoffschen[4]) Methode zu kennzeichnen. Kirchhoff betrachtet nur zweidimensionale Bewegungen, d. h. es wird angenommen, daß die Strömung in allen zur xy-Ebene parallelen Ebenen die gleiche sei; außerdem wird die Strömung als wirbelfrei[5]) und stationär vorausgesetzt. Zufolge dieser Einschränkungen werden funktionentheoretische Methoden anwendbar, und die Theorie der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen stellt eine der eigenartigsten Anwendungen der konformen Abbildung auf Fragen der theoretischen Physik dar.

Es bedeute in der üblichen Weise φ das Geschwindigkeitspotential und ψ die Stromfunktion, so daß also die Geschwindigkeitskomponenten u und v durch die Beziehungen

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \quad (1)$$

gegeben sind. Führt man nun die beiden komplexen Variablen

$$z = x + iy \quad \quad (2)$$

$$f = \varphi + i\psi \quad \quad (3)$$

---

1) G. Kirchhoff, Journ. reine angew. Math. 70, 1869, 289 bis 298. Ges. Abh. Leipzig 1882, S. 416 bis 427. Mechanik (3. Aufl.) S. 290 bis 307.

2) M. Brillouin, Ann. chim. et phys. (8) 23, 1911, S. 146 ff. Man vergl. auch T. Levi-Civita Rend. Circ. mat. Palermo 23, 1907, 1 bis 37.

3) T. Levi-Civita, Rend. Circ. mat. Palermo 23 1907, 1 bis 37.

4) loc. cit. Anm. 1, außerdem Lamb, Hydrodynamik, deutsche Übers. v. Friedel, Leipzig 1907, S. 107 ff., wo aber φ und ψ das umgekehrte Vorzeichen haben wie im Text.

5) Natürlich außerhalb der Unstetigkeitsflächen, denn diese sind Flächenwirbeln gleichwertig.

ein, so ergibt jede analytische Funktion f von z, und also auch jede Funktion z von f, eine Lösung des Strömungsproblems. Soll nun die Flüssigkeit teils von festen Wänden ω, teils von Diskontinuitätslinien λ — die natürlich nur auf den festen Körpern oder im Unendlichen endigen können — begrenzt sein, so müssen sowohl die festen Wände wie die Unstetigkeitsgrenzen Stromlinien $\psi =$ konst. sein. Die eigentümliche Schwierigkeit des Problems besteht nun darin, daß die Linien λ ihrer Gestalt nach nicht bekannt sind, sondern erst auf Grund einer physikalischen Bedingung bestimmt werden müssen. Diese Bedingung ergibt sich folgendermaßen: sind die Linien λ freie Strahl-Linien, oder befindet sich auf der einen Seite von ihnen ruhende bezw. mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Flüssigkeit [1]), so ist auf dieser Seite der Druck konstant. Folglich muß auch in der strömenden Flüssigkeit auf der anderen Seite der Druck und demnach auch die Geschwindigkeit $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ längs λ konstant sein. Die Diskontinuitätslinien sind also Stromlinien konstanter Geschwindigkeit. Gewöhnlich denkt man sich bei Problemen dieser Art die Einheiten so bestimmt, daß der Wert der Geschwindigkeit längs einer λ-Linie gleich 1 angenommen wird; das soll auch im folgenden geschehen.

Die Lösung der Aufgabe gelingt nun durch die im Anschluß an Kirchhoff ausgebildete Methode, für den Fall, daß die festen Wände ω geradlinig sind. Die Methode besteht in der Einführung einer neuen komplexen Variablen

$$\varrho = \frac{dz}{df} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4);$$

wegen der Gleichungen (1) bis (3) gilt für diese Variable

$$\varrho = \frac{1}{u - iv} = \frac{1}{q}\left(\frac{u}{q} + i\frac{v}{q}\right) = \frac{1}{q}e^{i\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4a),$$

wo q, wie oben, den absoluten Betrag der Geschwindigkeit in irgend einem Punkte des Strömungsfeldes bedeutet, und ϑ die Richtung, welche die Geschwindigkeit mit der positiven x-Achse bildet. Bilden wir nun noch den natürlichen Logarithmus von ϱ

$$\lg \varrho = \lg \left|\frac{1}{q}\right| + i\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und untersuchen, welche Bereiche in den Ebenen der komplexen Variablen f, ϱ und $\lg \varrho$ dem betrachteten (von ω und λ begrenzten) Strömungsbereiche der Variablen z entsprechen!

Der Bereich der Variablen f ist von horizontalen Geradenstücken $\psi =$ konst. begrenzt. In der ϱ-Ebene entsprechen den freien Linien λ Kreisbögen $\frac{1}{|q|} =$ konst. und den festen, geradlinigen Wänden Stücke von Geraden $\vartheta =$ konst., die durch den Ursprung gehen. Der Bereich in der $\lg \varrho$-Ebene endlich ist durch Gerade $\frac{1}{|q|} =$ konst. und $\vartheta =$ konst. begrenzt.

Folglich lassen sich mit Hilfe der Schwarz-Christoffelschen Formeln die Bereiche der Variablen f und $\lg \varrho$, die beide nur von geradlinigen Stücken begrenzt sind, aufeinander konform abbilden. Damit ist der Zusammenhang zwischen f und ϱ gewonnen und der gesuchte Zusammenhang zwischen z und f ergibt sich aus (4) durch Quadraturen.

Nach dieser Methode sind zahlreiche Beispiele [2]) gerechnet worden, aber sie ist ihrem Wesen nach auf Fälle von geradlinigen festen Wänden beschränkt. Neuerdings hat Tumlirz [3]) eine Abänderung des Kirchhoffschen Verfahrens angegeben, indem er eine neue komplexe Variable $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ einführt, in deren Ebene die Kurven $\frac{1}{|q|} =$ konst. konfokale Ellipsen und $\vartheta =$ konst. die dazu orthogonalen Hyperbeln sind. Aber auch nach dieser Methode gelingt es nur, geradlinige feste Wände zu berücksichtigen.

2. Die Methode von Levi-Civita. Auch Levi-Civita beschränkt sich auf zweidimensionale Strömung, behandelt aber den Fall, daß sich ein beliebig geformtes Hindernis in einem stationären Strome befindet, der in weiter Entfernung vom Hindernis die konstante Geschwindigkeit 1 hat. Es gelingt ihm, den analytischen Charakter der möglichen Lösungen festzulegen und das allgemeine Integral des Problems anzugeben.

[1]) Der Einfachheit der Ausdrucksweise wegen sollen im folgenden beide Fälle mit der Bezeichnung »freie Linien« umfaßt werden.

[2]) Enzykl. d. math. Wissensch. IV 3 Artikel von Love, S. 97 ff.; vergl. auch Lamb loc. cit. R. v. Mises, Zeitschr. Ver. deutsch. Ingen. 1917, S. 447 bis 452, 469 bis 474, 493 bis 498.

[3]) O. Tumlirz, Wien. Ber. 121, 1912, 745 bis 811.

Es bedeute C das Profil des Hindernisses (s. Abb. 1) und Ox die Richtung der ungestörten Strömung. Die festen Wände ω_1 und ω_2 trennen, zusammen mit den freien Linien λ_1 und λ_2, das Strömungsfeld A von dem Gebiet, das der Körper und das Totwasser B einnehmen. Von der Orientierung des Hindernisses wird einschränkend angenommen, daß Ox innerhalb CB verläuft; ferner wird vorausgesetzt, daß der vorderste Punkt O des Hindernisses, der auch ein Eckpunkt sein darf, der einzige Staupunkt der Bewegung sei. Brillouin und Villat[1]) haben später darauf hingewiesen, daß letztere Annahme willkürlich ist; die Aufgabe wird dadurch überbestimmt. Ist der vorderste Punkt außerdem ein Eckpunkt, so verwickelt sich das Problem weiter, weil sich dann ein zweites, dem Körper vorgelagertes Gebiet toten Wassers von endlicher Abmessung bilden kann. Aber von diesen Verhältnissen bleibt das Prinzipielle der Methode von Levi-Civita unberührt; sie macht vielmehr alle diese Fälle der Berechnung zugänglich.

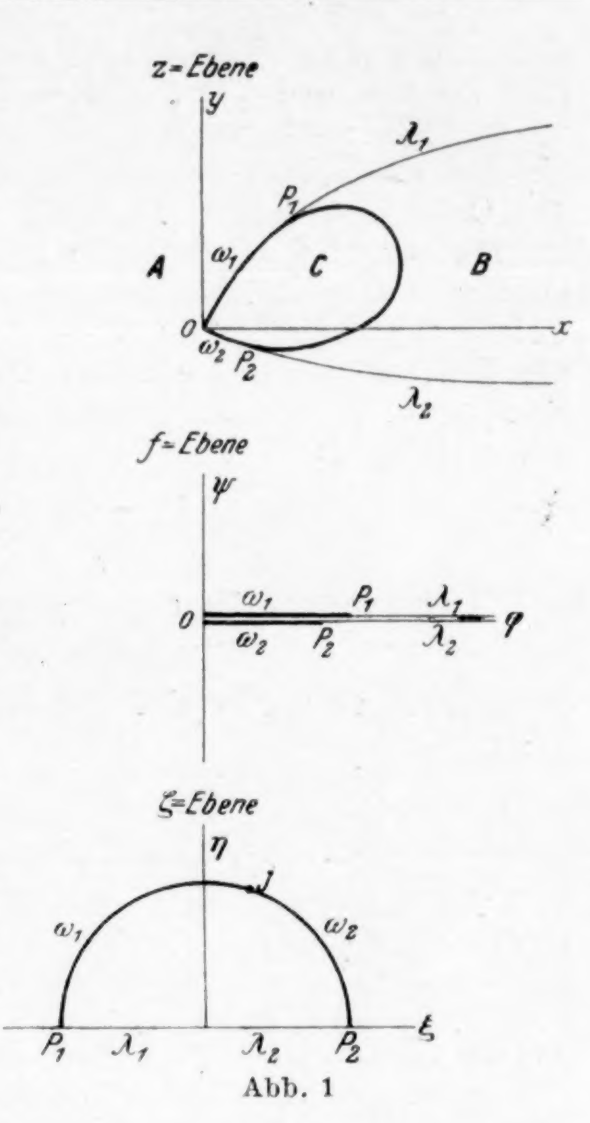


Abb. 1

Wie Kirchhoff geht Levi-Civita von der Betrachtung der Ebenen der beiden komplexen Variablen z und f (s. Formel (2) und (3)) aus. Legt man die in φ und ψ enthaltenen willkürlichen Konstanten so fest, daß φ und ψ beide in O — dem »Bug« des Körpers C — verschwinden, so entspricht dem Strömungsgebiet A in der z-Ebene die ganze, längs der positiven Halbachse aufgeschnittene f-Ebene, wobei die Zuordnung der Berandung aus der zweiten Figur der Abb. 1 hervorgeht; und zwar ist diese Zuordnung ein-eindeutig. Wie z selbst läßt sich also auch die Variable w

$$w = u - iv = \frac{df}{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

als Funktion von f auffassen, die im Gebiet der gesamten zerschnittenen f-Ebene endlich, stetig und (mit eventueller Ausnahme der Berandung) regulär ist. Statt der Funktion w wird nun noch ihr Logarithmus $(-i\omega)$ durch die Gleichung

$$w = e^{-i\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

eingeführt, und auch ω ist in der ganzen f-Ebene eindeutig und stetig, mit Ausnahme des Punktes $f = 0$, wo $i\omega$ positiv unendlich wird.

An Stelle der Variablen f wird nun endlich eine neue Variable $\zeta = \xi + i\eta$ eingeführt, die so gewählt ist, daß der zerschnittenen f-Ebene ein Halbkreis vom Radius 1 um den O-Punkt der ζ-Ebene entspricht. Die Zuordnung der Berandungen ergibt sich aus Abb. 1. Jede Funktion von f, die in der zerschnittenen f-Ebene regulär ist, läßt sich demnach als Funktion von ζ auffassen, die innerhalb des angegebenen Halbkreises regulär ist, insbesondere also auch die durch (7) definierte Funktion ω. Da nun auf den freien Linien λ_1 und λ_2 die Geschwindigkeit den konstanten Wert 1 hat, ist ω dort reell; dasselbe gilt demnach auf dem Halbmesser $-1, +1$, der ζ-Ebene und $\omega(\zeta)$ kann also nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip in den unteren Halbkreis vom Radius 1 fortgesetzt werden. Auch auf der Begrenzung des Einheitskreises ist $\omega(\zeta)$ noch regulär mit alleiniger Ausnahme des Punktes $\zeta = j$, der $f = 0$ entspricht, und dem durch Spiegelung daraus hervorgegangenen Punkte $\zeta = \bar{j}$.

Das Wesen der Methode von Levi-Civita besteht also kurz in folgendem: die beiden Variablen, die durch die Natur der Aufgabe gegeben sind, nämlich Geschwindigkeit w als Funktion des Ortes z, werden durch zwei andre Variable ω und ζ ersetzt. Der Gewinn, der dadurch erzielt wird, ist ein doppelter; erstens ist der Bereich der ζ-Ebene unabhängig vom Körperprofil ein völlig bestimmter, und innerhalb dieses Bereichs ist ω eine Funktion von ζ, die völlig bestimmten analytischen Charakter hat (s. u. S. 402), und zweitens lassen

[1]) M. Brillouin, C. R. Paris Bd. 153, 1911, S. 43 bis 45. H. Villat, C. R. Bd. 154, 1912, S. 1693 bis 1695. Man vergl. auch W. B. Morton, Phil. Mag. (VI) 41, 1921, S. 801 bis 808.

sich alle geometrischen, kinematischen und dynamischen Elemente der Bewegung in einfachster Weise durch ζ und $\omega(\zeta)$ ausdrücken.

Was zunächst den zweiten dieser Punkte betrifft, so soll hier nicht darauf eingegangen werden, in welcher Weise sich die Stromlinien, die Geschwindigkeit als Funktion des Ortes, sowie die Gleichung der Wände ω und der Grenzflächen λ mit Hilfe der Variablen ω und ζ ausdrücken; alle diese Größen ergeben sich in endlicher Form oder durch einmalige Quadratur. Von besonderem Interesse ist dagegen die Berechnung der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den eingetauchten Körper ausübt. Bedeute p den Druck $d\gamma$ ein Element der Begrenzung, n die nach innen gerichtete Normale auf $d\gamma$, so sind die Komponenten der resultierenden Gesamtkraft (auf das resultierende Drehmoment gehen wir nicht ein):

$$R_x = \int\limits_\gamma p \cos(nx)\, d\gamma, \quad R_y = \int\limits_\gamma p \cos(ny)\, d\gamma \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Fassen wir diese Komponenten zu dem Vektor

$$\Re = R_x + i R_y \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

zusammen, so ergibt sich für $\Re$ der einfache und elegante Ausdruck

$$\Re = \frac{1}{2i} \int\limits_{|\zeta|=1} e^{i\omega}\, df \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Das Integral ist über den ganzen Einheitskreis der ζ-Ebene zu erstrecken. Da nun der Integrand (in dem natürlich df durch seinen Ausdruck in ζ ersetzt zu denken ist) nur für $\zeta = 0$ einen Pol hat, läuft die Berechnung von $\Re$ auf die einfache Auswertung des Residuums der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion für den Pol $\zeta = 0$ hinaus. Der Widerstand in der Bewegungsrichtung R_x ergibt sich dann als reeller Teil des so berechneten $\Re$.

Wenden wir uns nunmehr dem allgemeinen Integral des behandelten Problems zu. Es wurde schon erwähnt, daß die einzigen Singularitäten der Funktion $\omega(\zeta)$ auf dem Einheitskreise in den Punkten j und $\bar{j}$ liegen. Der Punkt j entspricht dem Eckpunkt des Hindernisses O, Abb. 1, und die Singularität beruht darin, daß in O zwei Geschwindigkeitsrichtungen zusammenstoßen, was eine Diskontinuität im reellen Teile von $\omega(\zeta)$ zur Folge hat. Nun läßt sich eine elementare Transzendente $\omega_0(\zeta)$ angeben, die in j und $\bar{j}$ genau die vorgeschriebene Singularität hat; betrachtet man also die Differenz

$$\Omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) - \omega(\zeta) \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

so ist $\Omega(\zeta)$ eine Funktion der komplexen Variablen ζ, die im ganzen Einheitskreis regulär, auf der reellen Achse reell und außerdem auf dem Einheitskreis endlich und stetig ist. $\Omega(\zeta)$ ist also darstellbar durch eine Reihe

$$\Omega(\zeta) = \sum_0^\infty {}^n c_n \zeta^n \quad \ldots \ldots \quad (12),$$

in der die c_n reelle Konstanten sind und die innerhalb und auf dem Einheitskreise konvergiert. Damit ist das allgemeine Integral gewonnen; es setzt sich zusammen aus einer speziellen Funktion $\omega_0(\zeta)$ von charakteristischer Singularität und einem regulären Teil, der den Grad der Willkürlichkeit einer analytischen Funktion (genauer: einer Reihe wie Gl. (12)) hat. Es muß übrigens noch erwähnt werden, daß zwischen den reellen Koeffizienten c_n eine Bedingungsgleichung besteht und daß $c_0 = \omega_0(o)$ ist.

Der speziellen Funktion $\omega_0(\zeta)$, die noch zwei willkürliche Konstanten enthält, entspricht ein Hindernis, dessen Spur aus zwei aneinander stoßenden geraden Stücken besteht. Der Winkel zwischen beiden und die Neigung gegen die Stromrichtung im Unendlichen sind willkürlich, das Längenverhältnis ist bestimmt[1]). Alle übrigen möglichen Profile ergeben sich durch verschiedene Wahl von $\Omega(\zeta)$.

Die umgekehrte Aufgabe, d. h. die Bestimmung der Funktion Ω, die zu einem vorgegebenen Profil gehört, führt zu einer Funktionalbeziehung, die mit den gegenwärtigen Hilfsmitteln kaum zu behandeln sein dürfte; auch hat Levi-Civita selbst kein Beispiel eines krummlinig begrenzten Hindernisses durchgerechnet.

[1]) Darin äußert sich die oben erwähnte Ueberbestimmtheit des Problems. Bei symmetrischer Stellung gegen die Strömung werden die Längen der beiden Strecken gleich und man erhält das von Rethy und Bobylew nach der Methode von Kirchhoff behandelte Problem. Wird der Winkel zu einem gestreckten, so ergibt sich die Kirchhoff-Rayleighsche Platte.

3. Prinzipielle Ergänzungen zur Methode von Levi-Civita. Bevor wir zu den zahlreichen Anwendungen übergehen, welche die eben geschilderte Methode gefunden hat, ist es nötig, auf einige grundsätzliche Ergänzungen einzugehen, die sich in der Folgezeit als nötig erwiesen haben. Brillouin[1]) hat darauf hingewiesen, daß die von Levi-Civita aufgestellte Lösung insofern zu allgemein ist, als sie noch Fälle umfaßt, die physikalisch nicht realisierbar sind. Zunächst muß gefordert werden, daß die Geschwindigkeit sich auf Grund der aufgestellten Lösung nirgends größer als 1 — dem Werte in der ungestörten Strömung — ergibt; denn das würde sonst das Auftreten eines negativen Druckes zur Folge haben. Ferner kann der Fall eintreten, daß die Lösung einen Strömungsbereich liefert, der nicht einfach zusammenhängend ist, indem die resultierenden Wände und Unstetigkeitslinien sich selbst oder gegenseitig schneiden, was die Lösung physikalisch unmöglich macht.

Auf einen Fall der letzteren Art ist Brillouin gestoßen, indem er eine einfache Klasse von krummlinigen symmetrischen Hindernissen untersuchte, nämlich diejenigen, die man erhält, wenn man von der Reihe (12) nur das erste Glied beibehält. Dabei zeigte sich, daß mit Aenderung der Konstanten die zugehörigen Wände ω und freien Linien λ sich schneckenförmig aufrollen, so daß von einem bestimmten Werte an die freie Linie die Wand schneidet, von der sie ausgegangen ist. Im übrigen stellen diese Rechnungen von Brillouin — dort, wo sie physikalisch zulässige Bewegungen liefern — die ersten Fälle krummliniger Hindernisse dar und ergeben eine interessante Abhängigkeit des Widerstandes von der Form bei gleicher Breite.

Noch auf einen anderen Punkt von Wichtigkeit hat Brillouin hingewiesen. Es zeigt sich nämlich, daß der Krümmungsradius der Unstetigkeitslinien in dem Punkte, wo sie sich vom Hindernis ablösen, im allgemeinen verschwindet; das Hindernis muß also dort mit scharfem Rande endigen. Soll dagegen die Unstetigkeitslinie sich an einem Punkte mit regulärer Krümmung loslösen — dieser Punkt wird sich dann mit der Orientierung des Hindernisses verschieben —, so müssen wiederum besondere Bedingungen erfüllt sein. Im letzteren Falle nennt Brillouin das Hindernis »bugförmig«, im ersteren »pflugförmig«; beide Fälle ergeben in der Tat ein völlig verschiedenes physikalisches Verhalten.

Später hat Villat[2]) die Untersuchungen von Brillouin wieder aufgenommen und für eine Reihe von Fällen die analytischen Bedingungen aufgestellt, denen die Lösung genügen muß, damit die erwähnten physikalischen Unmöglichkeiten nicht auftreten. Er knüpft dabei an eine Darstellung des allgemeinen Integrals an, die derjenigen von Levi-Civita überlegen ist und die er selbst zuvor gegeben hatte[3]).

Die willkürliche Funktion, die in der Lösung von Levi Civita enthalten ist (die Reihe (12)), hat keinen erkennbaren Zusammenhang mit der Form des Hindernisses; Villat führt nun statt dessen eine andere willkürliche Funktion ein, die mit dem Profil des Hindernisses in enger und übersichtlicher Weise verknüpft ist. Dafür geht er von einem polygonalen Hindernis aus — die Funktion $\Omega(\zeta)$ für diesen Fall war schon durch Rechnungen von Cisotti[4]) bekannt — und gelangt so durch einen Grenzübergang, der in aller Strenge hinterher gerechtfertigt wird, zu folgender Form für das allgemeine Integral:

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\sigma)\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2}\,d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Dabei bedeutet σ die Abweichung des Punktes ζ auf dem Einheitskreise $|\zeta| = 1$ und $\vartheta = f(\sigma)$ die Neigung der Tangente in der z-Ebene im zugehörigen Punkte des Profils. Diese Funktion unterliegt der Bedingung

$$\int_0^\pi f(\sigma)\,d\sigma = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13a)$$

[1]) M. Brillouin, C. R. Paris Bd. 151, 1910, S. 931 bis 933. Ann. de chim. et phys. (8) 23, 1911, S. 145 bis 230.

[2]) H. Villat, C. R. Paris 157, 1913, S. 700 bis 703, und Journ. de math. pure et appl. VI (10), 1914, S. 231 bis 290.

[3]) H. Villat, C. R. Paris 151, 1910, S. 1034 bis 1037. Ann. Éc. Norm. (3) 28, 1911, S. 203 bis 311.

[4]) U. Cisotti, Circ. mat. Palermo 25, 1908, S. 145 bis 179.

und stellt die willkürliche Funktion der Lösung dar. Die Funktionalgleichung, welche zu einem vorgegebenen Profil das zugehörige $f(\sigma)$ bestimmt, ist zwar auch hier noch nicht lösbar, aber da $f(\sigma)$ die angegebene einfache geometrische Bedeutung hat, ist es leicht, $f(\sigma)$ so zu wählen, daß es einem Hindernis von gegebenem Charakter entspricht. Dafür hat auch Villat mehrere Beispiele gegeben.

4. Anwendungen der Methode von Levi-Civita[1]. a) Abbildung durch elementare Funktionen. Die Fruchtbarkeit der Methode zeigt sich darin, daß andere — wenn auch natürlich verwandte Probleme — sich mit ihrer Hilfe mit dem gleichen Grade von Allgemeinheit behandeln lassen. Die bisherigen Anwendungen lassen sich in zwei Klassen von Aufgaben einteilen. Bei den einfacheren gelingt die Abbildung des betrachteten Strömungsbereiches auf einen Halbkreis der ζ Ebene, bei den komplizierteren tritt an dessen Stelle ein halber Kreisring; dementsprechend ist die Abbildung im ersten Falle durch elementare Funktionen ausführbar, während im zweiten Falle elliptische Funktionen erforderlich sind und die Rechnungen viel weitläufiger werden.

Als Beispiele der ersten Klasse mögen zwei Arbeiten von Cisotti[2] und Colonetti[3] Erwähnung finden. Cisotti behandelt den Ausfluß eines freien Strahles aus einem beliebig geformten Gefäß und Colonetti die Strömung in einem Kanal bei beliebiger Form des Bodens. In beiden Fällen wird natürlich die Strömung als zweidimensional und außerdem die Flüssigkeit als schwerelos behandelt.

Der Gang der Rechnung schließt sich auf das engste an Levi-Civita an, wie am einfachsten aus dem Vergleich der Abbildungen 2a und 2b mit Abb. 1 hervorgeht. Das Prinzipielle besteht wieder in der Einführung der Variablen ω und ζ, wobei der analytische Charakter der Funktion $\omega(\zeta)$ völlig bekannt ist. Es läßt sich daher auch, wie bei Levi-Civita, das allgemeine Integral der beiden Probleme angeben. Dabei ist zu erwähnen, daß bei dem von Cisotti behandelten Falle des freien Strahles keine charakteristische Singularität vorliegt, so daß die Lösung einfach durch eine Reihe der Form (12) gegeben wird, und auch bei der Colonettischen Aufgabe treten nur dort Singularitäten auf, wo das Kanalbett eine scharfe Ecke macht. Alle geometrischen Elemente, darunter bei den Strahlen der Kontraktionskoeffizient, und die dynamische Wirkung auf die Wände, drücken sich wieder in eleganter Weise durch ω und ζ aus.

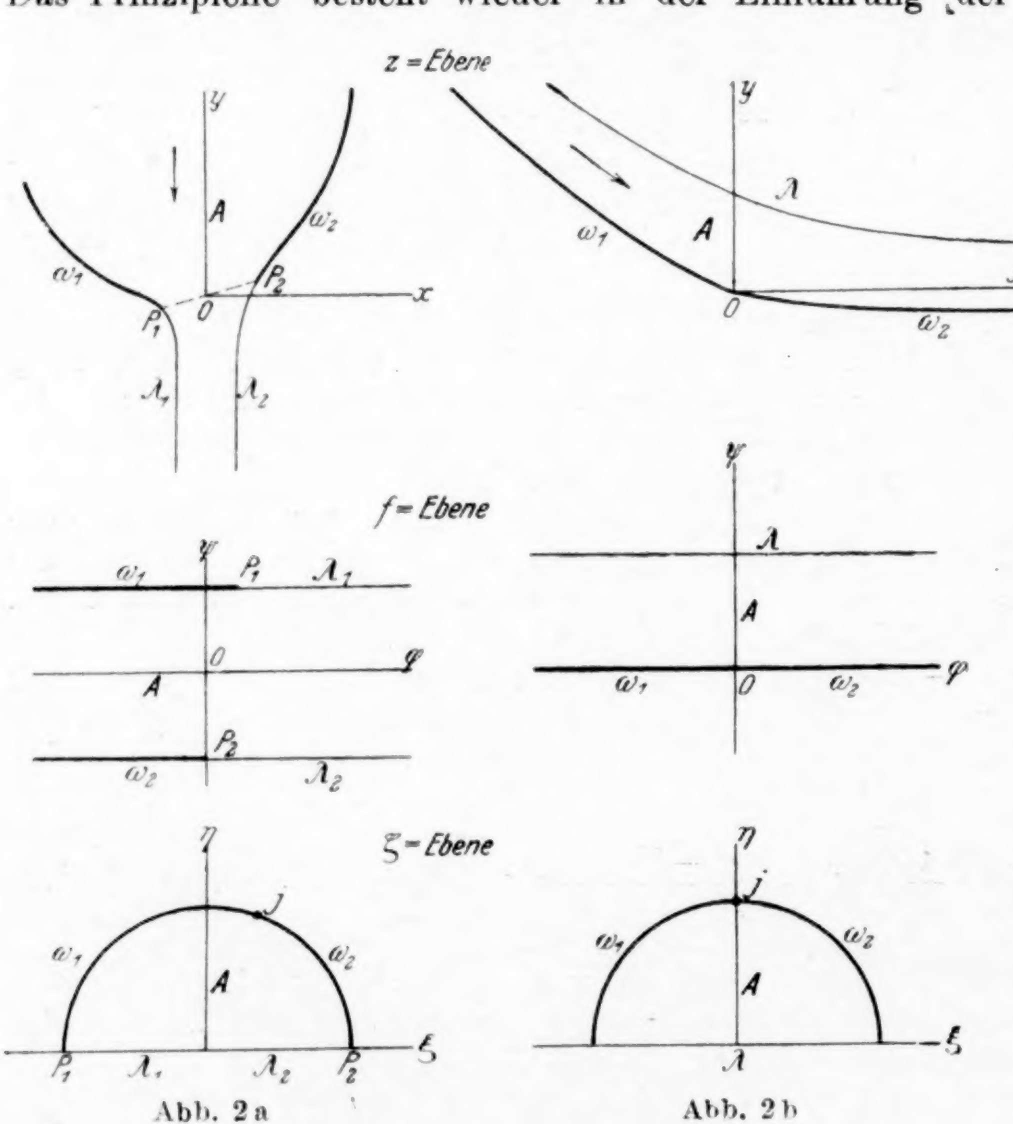


Abb. 2a Abb. 2b

Als spezielle Anwendung behandeln beide Autoren den Fall polygonaler Begrenzung; später hat Cisotti auch ein Beispiel des Ausflusses aus einem krummlinig begrenzten Gefäß gegeben[4].

[1] Eine sehr vollständige Literaturangabe bis zum Jahre 1913 findet man in der französischen Ausgabe der Mathematischen Encyklopädie, Artikel »Développements concernant l'hydrodynamique«, nach dem deutschen Artikel von Love bearbeitet von Appell, Beghin, Villat. Tome IV, Volume 5. Paris. Leipzig 1914 Im Text sind nur einige typische Beispiele erwähnt.

[2] U. Cisotti, Rend. Circ. mat. Palermo 25, 1908, S. 145 bis 179.

[3] G. Colonetti, Rend. Circ. mat. Palermo 32, 1911, S. 51 bis 87.

[4] U. Cisotti, Rend. Circ. mat. Palermo 26, 1908, 373 bis 382.

b) Abbildung durch elliptische Funktionen. Sobald die Natur der Aufgabe das Auftreten von mehr als zwei freien Linien zur Folge hat oder die Anwesenheit von anderen festen Wänden (außer dem eingetauchten Körper) zu berücksichtigen ist, tritt an die Stelle des Halbkreises der ζ-Ebene ein halber Kreisring. Die Lösung der Abbildungsaufgabe erfordert in diesem Falle, wie schon erwähnt, die Verwendung elliptischer Funktionen, und entsprechend dem veränderten Regularitätsbereiche der Funktion $\omega(\zeta)$ wird der Grad der Allgemeinheit der Lösung nicht mehr durch eine Taylorsche Reihe, sondern durch eine Laurentsche Reihe wiedergegeben, zwischen deren reellen Koeffizienten gewisse Beziehungen bestehen.

Als erstes Beispiel dieser Art wurde von Cisotti[1]) die Bewegung eines Körpers in einem geradlinigen Kanal von konstanter Breite behandelt, wobei noch der Körper symmetrisch zur Mittelachse des Kanals angenommen wird. Dieses Problem ist später von Villat[2]) auf den Fall beliebig geformter Körper in Kanälen von willkürlicher Gestalt erweitert worden, wobei allerdings noch die schon erwähnte (S. 401) willkürliche Wahl des Staupunktes getroffen wird. Der Gang der Rechnung ergibt sich am einfachsten aus der Betrachtung der Abbildung 3a. Die einzigen Singularitäten der Funktion $\omega(\zeta)$ in dem halben Kreisringe der ζ-Ebene liegen in den Punkten j und j_1 der Berandung, die dem Bug des Hindernisses und dem unendlich fernen Punkte des Kanals entsprechen. Durch Spiegelung wird der Bereich auf den ganzen Kreisring ausgedehnt und das allgemeine Integral setzt sich dann aus einer speziellen Lösung mit charakteristischer Singularität und einer Laurentschen Reihe zusammen. Statt dessen läßt sich auch in diesem Falle eine Verallgemeinerung der Formel (13) angeben. Sie enthält dann zwei willkürliche Funktionen, die in erkennbarem Zusammenhange mit der Form des Hindernisses und der Gestalt der Kanalwand stehen. (Auch einige spezielle Beispiele werden von Villat durchgerechnet.)

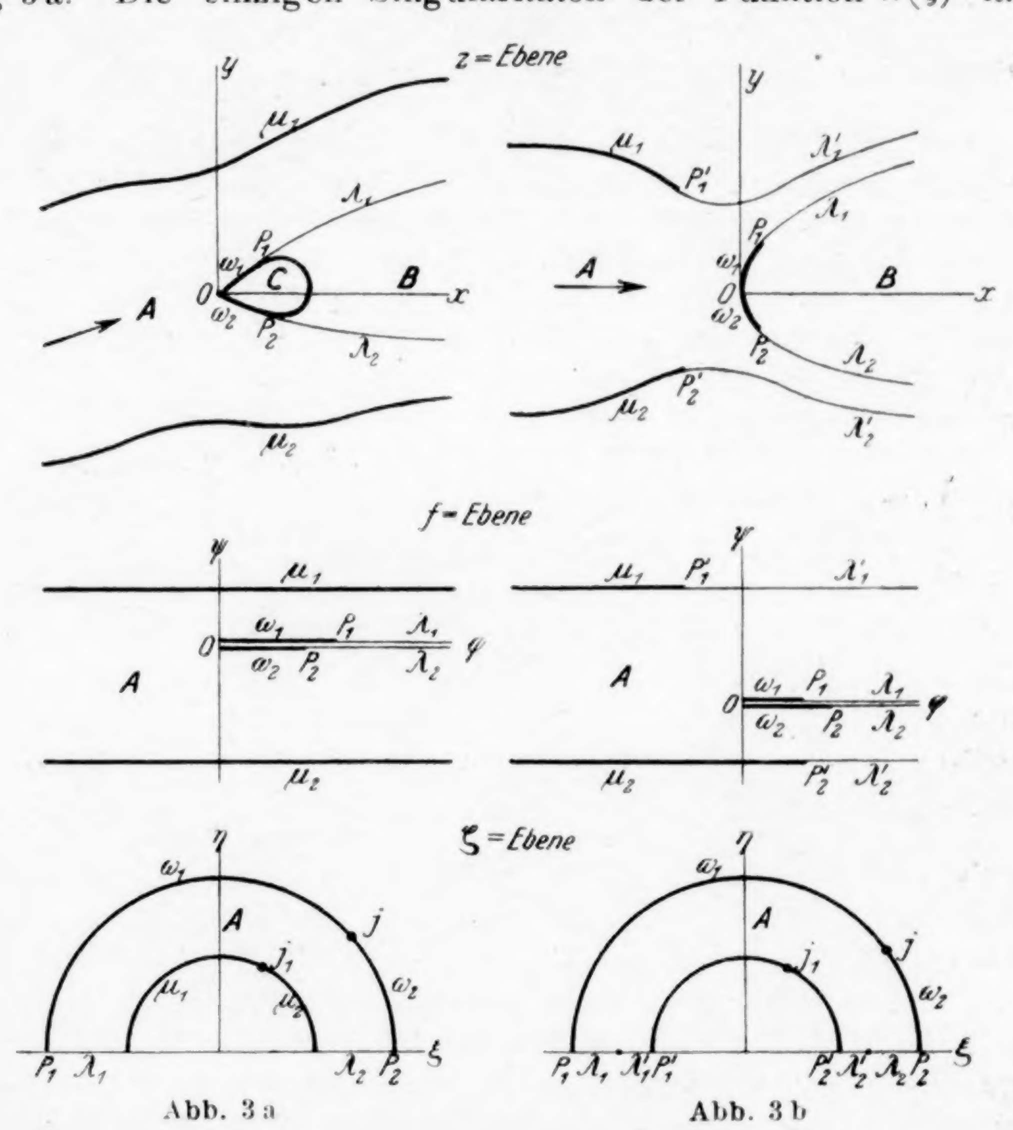


Abb. 3a Abb. 3b

Die Elemente der Bewegung drücken sich in ganz analoger Weise wie bei Levi-Civita durch ω und ζ aus, insbesondere werden auch jetzt die Komponenten der Gesamtkraft, die auf den Körper wirkt, durch die Formel (10) gegeben. Ist insbesondere der Kanal von parallelen Geraden begrenzt, so ergibt sich noch ein anderer bemerkenswerter Ausdruck für R_x, den Villat als Verallgemeinerung einer Formel von Cisotti ableitet. Bedeutet nämlich Δ die Breite des Kanals, und H die asymptotische Breite des Totwassers, so wird

$$R_x = \frac{H^2}{2\Delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Dabei ist daran zu erinnern, daß die Geschwindigkeit auf den freien Linien und im Unendlichen gleich 1 gesetzt ist; sonst würde noch das Quadrat ihres Betrages als Faktor auftreten.

[1]) U. Cisotti, Rend. Circ. mat. Palermo 28, 1909, 307 bis 352.

[2]) H. Villat, C. R. Paris 152, 1911, 303 bis 306; Ann. Éc. Norm. (3) 29, 1912, 127 bis 197. Zuvor hatte derselbe Autor den verwandten Fall der Bewegung eines Körpers bei Anwesenheit einer festen Wand behandelt. C. R. 151, 1910, 933 bis 935; Ann. Éc. Norm. (3) 28, 1911, 203 bis 311; Journ. de math. pure et appl. (6) 7, 1911, 353 bis 408.

Ein weiteres Beispiel möge noch Erwähnung finden, weil es zu praktisch wichtigen Folgerungen führt, nämlich die von Vâlcovici behandelte Ausströmung eines Strahles aus einer Düse gegen eine Platte[1]). Die nahe analytische Verwandtschaft dieses Problems mit dem zuletzt erwähnten geht am besten wieder aus dem Vergleich der Abbildungen 3a und 3b hervor. Bei Vâlcovici wird aber nicht die wiederholt erwähnte willkürliche Festlegung des Staupunktes getroffen, sondern seine Lage wird aus der Lösung des Problems selbst gewonnen. Die Methode der Rechnung wird dadurch nicht beeinflußt, sondern nur die Konstantenbestimmung, die überhaupt bei allen diesen Problemen einen schwierigen Teil der Rechnung ausmacht, selbst dort, wo die x-Achse Symmetrie-Achse ist, was erhebliche Vereinfachungen mit sich bringt.

Vâlcovici verwendet seine Rechnungen, um Widerstandsmessungen an einer Platte, die entweder in einem Kanal oder in einem freien Luftstrahl ausgeführt sind, miteinander zu vergleichen. In beiden Fällen läßt sich nämlich der theoretisch zu erwartende Widerstand mit demjenigen in der unbegrenzten Flüssigkeit vergleichen; der Unterschied ist in beiden Fällen (unter den Bedingungen des Experiments) sehr klein, positiv im Fall des Kanals, negativ im Falle des Strahles, was im Einklang mit der Erfahrung steht.

Zahlreiche weitere Probleme, die mit Hilfe der Abbildung durch elliptische Funktionen der Behandlung zugänglich sind, werden von Villat[2]) angegeben.

5. Berücksichtigung der Schwere. Die bisher angegebenen Methoden versagen, wenn die strömende Flüssigkeit unter der Wirkung von Volumkräften betrachtet werden soll. Die freien Grenzlinien sind dann nicht mehr Strömungslinien konstanter Geschwindigkeit und lassen sich darum nicht mehr in Linien von geometrisch einfachem Charakter (Stücke der reellen Achse in der ζ-Ebene) transformieren.

Soll insbesondere die Schwere berücksichtigt werden, und denken wir sie uns in der Richtung der negativen y wirkend, so müssen die freien Linien Strömungslinien $\psi =$ konst. sein, auf denen

$$u^2 + v^2 + 2gy = \text{konst.} \qquad (15)$$

ist. (Die Dichte der Flüssigkeit ist gleich 1 gesetzt.)

Nach einer Methode, die Rayleigh bei Behandlung der »Einzelwelle« gegeben hat[3]), lassen sich Nährungslösungen für Fälle schneller stationärer Strömungen aufstellen. Als schnell ist dabei eine Strömung anzusehen, wenn die mittlere Geschwindigkeit groß ist gegen $\sqrt{2gh}$, wo h die Tiefe der Wasserschicht bedeutet. Cisotti[4]) behandelt auf diese Weise den Sturz eines Wasserfalls, der sich von einem horizontalen Flußbett ablöst, und die Strömung in einem Kanal, dessen ebene Sohle einen beliebigen Winkel α gegen die Horizontale bildet.

Ein spezielles Beispiel einer streng gültigen (natürlich zweidimensionalen) Lösung gab Weingarten[5]) schon 1904. Es handelt sich um eine Strömung, bei der die Flüssigkeit unter Druck zwischen geeignet geformten Wänden bergauf geführt wird und dann unter Bildung einer ebenen freien Oberfläche talwärts abströmt.

Den Ueberlauf über ein Wehr behandelt Blasius[6]) als sog. »inverses Problem« mit Hilfe funktionentheoretisch-zeichnerischer Methoden. Die freie Grenze wird — angenähert den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend — willkürlich angenommen; das Geschwindigkeitspotential auf ihr läßt sich dann durch Integration gewinnen und das Stromlinienbild durch zeichnerische Fortsetzung gewinnen. Irgend eine Stromlinie im Inneren kann schließlich als Wehrrücken gewählt werden. R. v. Mises zeigt[7]), daß die empirisch bestimmten Koeffizienten für die Wassermenge des Ueberlaufs in merkwürdig

[1]) V. Vâlcovici, Ueber diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen. Diss. Göttingen 1913. Auch dieses Problem war zuvor in vereinfachter Gestalt von Cisotti behandelt worden. Cisotti untersucht nämlich die Zweiteilung eines Flüssigkeitsstrahles durch ein hineingebrachtes Hindernis und vergleicht den Widerstand, den es dort erfährt, mit demjenigen, den es in einem geraden Kanal erfahren würde. Rend. R. Acc. Linc. (V), 20 I, 1911, 314 bis 322, 494 bis 502.

[2]) H. Villat, C. R. Paris 152, 1911, 1081 bis 1084.

[3]) H. Lamb, Hydrodynamik, Leipzig 1907, S. 488.

[4]) U. Cisotti, Rend. R. Acc. Lincei (5) 20 II, 1911, 633 bis 637; (5) 21 I, 1912, 97 bis 102; Zeitschr. f. Math. u. Phys. 61, 1912/13, 76 bis 84.

[5]) J. Weingarten, Verhandl. des dritten intern. Math. Kongr. in Heidelberg 1904, Leipzig 1905, S. 409 bis 413.

[6]) H. Blasius, Z. Math. Phys. 58, 1910, 90 bis 110. 59, 1911, 43 bis 44.

[7]) R. v. Mises, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 496.

guter Uebereinstimmung stehen mit den Zahlen, zu denen man aus der Theorie der schwerelosen Flüssigkeit durch eine gewisse Hilfsbetrachtung gelangt.

In sehr allgemeiner Weise hat Villat[1]) das Problem in Angriff genommen. Seine Methode umfaßt den Ausfluß einer schweren Flüssigkeit aus einer Oeffnung in einer beliebig geformten Wand, den Ueberfall über ein Wehr und überhaupt alle zweidimensionalen, wirbelfreien Strömungen, bei denen sich der Bereich der strömenden Flüssigkeit derart auf einen Streifen einer $X+iY$-Ebene abbilden läßt, daß die festen Wände der Geraden $Y=0$ und die freien Linien der Geraden $Y=\pi$ entsprechen. Das Problem wird gelöst durch eine Funktion $\omega(X+iY)$, die in dem erwähnten Streifen regulär ist und für $Y=\pi$ einer Grenzbedingung genügt. Diese Funktion ω läßt sich konstruieren und der Grenzbedingung durch Lösung einer Integralgleichung erster Art genügen. Das Endresultat enthält eine willkürliche Funktion und kann also in gewissem Sinne als allgemeines Integral des behandelten Problems angesehen werden. Durch passende Wahl dieser Funktion gelangt man erst zu speziellen Beispielen.

Zwei Ansätze, welche zu Lösungen von Aufgaben der hier betrachteten Art führen, sind neuerdings von Richardson[2]) angegeben und in dieser Zeitschrift schon referiert worden.

6. Dreidimensionale Probleme. Die Behandlung von dreidimensionalen Strömungen mit Unstetigkeitsflächen bietet große Schwierigkeiten, da die funktionentheoretischen Methoden dann versagen[3]). Immerhin sind einige allgemeine Sätze, die sich auf diesen Fall beziehen, bekannt. Man kann die Frage aufwerfen, inwieweit das in der Einleitung erwähnte d'Alembertsche »Paradoxon« in seiner Gültigkeit beschränkt wird, wenn die Strömung nicht überall stetig vorausgesetzt wird. Diese Frage hat zu einer interessanten Diskussion zwischen Duhem, Picard und Villat[4]) geführt. Dabei hat sich ergeben, daß die in der Einleitung gegebene Formulierung ihre Gültigkeit behält, wenn die Forderung der »Ruhe im Unendlichen« genügend verschärft wird. (Es müssen gewisse Integrale im Unendlichen verschwinden.) Erstreckt sich aber eine Unstetigkeitsfläche hinter dem bewegten Körper ins Unendliche — und das muß der Fall sein, wenn der Druck im Unendlichen gleich 0 und im Endlichen nirgends negativ werden soll[5]) —, so hat Levi-Civita[6]) schon im Jahre 1901 bewiesen, daß sich ein Widerstand ergibt, der proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst.

In sehr allgemeiner Weise hat Almansi[7]) die dynamischen Wirkungen untersucht, die ein Körper in einer beliebig vorgegebenen Strömung erfährt. Es zeigt sich, daß diese Wirkungen sich aus drei Summanden zusammensetzen lassen: der erste rührt von der Wirkung der Flüssigkeitsteilchen her, die in Berührung mit dem Körper sind, der zweite von den Unstetigkeitsflächen und der dritte von den Wirbeln. Wir erwähnen nur ein wichtiges Ergebnis. Stellen u, v, w Werte der Geschwindigkeitskomponenten dar, welche den hydrodynamischen Gleichungen genügen, so erhält man eine weitere mögliche Bewegung mit gleicher Lage der Unstetigkeitsflächen, indem man u, v und w mit einer (positiven oder negativen) Konstante multipliziert; die dynamischen Wirkungen auf den eingetauchten Körper verhalten sich in den beiden Fällen wie die Quadrate der Geschwindigkeiten im gleichen Punkte der bewegten Masse.

Aus Impulsbetrachtungen leitet Vâlcovici[8]) eine Formel für den Widerstand eines Hindernisses in einem zylindrischen Strahl oder Kanal ab; diese Formel stellt eine Verallgemeinerung des oben (S. 405) erwähnten Satzes von Cisotti und Villat dar. Eine

---

[1]) H. Villat, C. R. Paris 156, 1913, 58 bis 61. Diese Note enthält offenbar nur die Resultate einer ausführlicheren Arbeit, die dem Berichterstatter nicht bekannt ist.

[2]) A. R. Richardson, Phil. Mag. 40, 1920, 97 bis 110. Man vergl. diese Zeitschr. Bd. 1, 1921, 68 bis 69.

[3]) Für die ältere Literatur vergl. man den Enzyklopädie-Artikel von Love. Vergl. S. 400 Anm. 2.

[4]) P. Duhem, C. R. Paris 159, 1914, 592 bis 595. E. Picard, C. R. 159, 1914, 638. P. Duhem, C. R. 159, 638 bis 640. H. Villat, C. R. 159, 1914, 800 bis 802.

[5]) P. Duhem, C. R. Paris 159, 1914, 790 bis 792.

[6]) T. Levi-Civita, Rend. R. Acc. Lincei (5) 10 I, 1901, 3 bis 9. Eine allgemeine Formel für den Kontraktionskoeffizienten leitet derselbe Autor ab. Atti R. Ist. Veneto 64, 1904/05, 1465 bis 1472.

[7]) E. Almansi, Rend. R. Acc. Lincei (5) 18 II, 1909, 587 bis 594; (5) 19 I, 1910, 56 bis 63, 116 bis 118, 244 bis 250, 437 bis 443.

[8]) V. Vâlcovici, C. R. Paris 157, 1913, 1131 bis 1132. Ann. di mat. pur. ed appl. (8) 23, 1914, 27 bis 40.

merkwürdige Minimaleigenschaft der kinetischen Energie diskontinuierlicher Flüssigkeitsbewegungen hat Brillouin[1]) abgeleitet.

Spezielle Fälle von Widerstandberechnungen sind noch nicht bekannt, dagegen ist das Problem des freien Flüssigkeitsstrahles von Rotations-Symmetrie von zwei Seiten in Angriff genommen worden. Förster[2]) behandelt den allgemeinen Fall, unter Berücksichtigung von äußeren Kräften, und zeigt, daß er sich auf die Bestimmung zweier Funktionen zurückführen läßt, deren eine die Gestalt der freien Oberfläche bestimmt. Für die beiden Unbekannten ergeben sich eine gewöhnliche und eine Differentialgleichung, beide von unendlich hoher Ordnung. Die Integrale dieser Gleichungen werden für eine Reihe von Fällen für die Umgebung des unendlich fernen Punktes in Reihen entwickelt; bei Abwesenheit von äußeren Kräften ergeben sich Strahlenformen, die sich asymptotisch der Kreiszylinderform nähern. Ueber die Umgebung der Mündung des Rohres, aus dem der Strahl austritt, sagen diese Rechnungen nichts aus.

Trefftz[3]) behandelt von vornherein den speziellen Fall eines schwerelosen Strahles, der aus der kreisförmigen Oeffnung im horizontalen Boden eines großen Gefäßes austritt, aber in seinem ganzen Verlauf. Die Aufgabe wird auf eine homogene, lineare Integralgleichung zweiter Art zurückgeführt; die dem Problem eigene Schwierigkeit zeigt sich darin, daß die Form des Strahles und damit der Kern der Integralgleichung erst zu bestimmen ist. Trotzdem wird die Lösung durch sukzessive Approximation gewonnen, wobei als erste Näherung eine willkürliche Strahlform angenommen wird; die Konvergenz des Verfahrens bleibt allerdings ungeklärt. Als Wert des Kontraktionskoeffizienten ergibt sich eine Zahl zwischen 0,60 und 0,62.

7. Berücksichtigung von Wirbelgebieten. Die Arbeiten, über die bisher berichtet wurde, zeigen, daß die Methode der Unstetigkeitsflächen bis in die neueste Zeit zur Berechnung des Flüssigkeitswiderstandes benutzt wird, obgleich sie, wie schon in der Einleitung betont wurde, keineswegs ein Bild liefert, das mit den wirklichen Erscheinungen in Uebereinstimmung steht. Die Frage nach dem Mechanismus des Flüssigkeitswiderstandes fällt nicht in den Rahmen des vorliegenden Berichtes, aber es müssen noch einige Untersuchungen Erwähnung finden, die den Versuch machen, die Theorie durch passende Ergänzungen, insbesondere durch Berücksichtigung des Auftretens von Wirbeln, zu besserer Uebereinstimmung mit den beobachtbaren Erscheinungen zu bringen.

Villat[4]) betrachtet den (zweidimensionalen) Fall einer ebenen Platte, die senkrecht zum Flüssigkeitsstrom gestellt ist, und gelangt auf folgendem Wege zu einer Lösung des nicht stationären Problems. Er superponiert über die diskontinuierliche Strömung $f = \varphi + i\psi$ der Kirchhoffschen Lösung eine zweite Strömung, die von zwei symmetrisch zu der Platte gestellten Wirbelfäden herrührt. Das komplexe Potential dieser zweiten Strömung wird durch den Ausdruck

$$f_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = P\sqrt{1+z^2} + \frac{Q}{2\pi i}\lg\frac{\sqrt{1+z^2}-Z_0}{\sqrt{1+z^2}-Z_0'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

gegeben. Dabei bedeuten P und Q Konstanten und Z_0, Z'_0 zwei konjugiert komplexe Zahlen, und es muß die Bedingung

$$P + \frac{Q Y_0}{\pi\sqrt{X_0^2+Y_0^2}} = 0; \quad Z_0 = X_0 + iY_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16\,a)$$

erfüllt sein, damit die Superposition von f und f_1 eine physikalisch zulässige Lösung ergibt.

Die so gewonnene Lösung kann nun nicht dauernd bestehen: die Unstetigkeitsfläche muß ihre Gestalt unter dem Einflusse der Wirbel und letztere müssen ihre Lage im Strömungsfelde ändern. Beide Veränderungen lassen sich zunächst für einen unendlich kleinen Zeitzuwachs δt berechnen, und von da aus gelangt man nach Methoden von Hadamard zu den Aenderungen in endlichen Zeiten. Die Berechnung des Gesamtdruckes auf die Platte und die Berücksichtigung von Wirbelreihen (wie sie aus den Untersuchungen von v. Kármán bekannt sind) wird angekündigt; es bleibt abzuwarten, inwieweit die periodische Bildung von Wirbeln hinter der Platte durch diese Rechnungen verständlicher wird.

[1]) M. Brillouin, C. R. 151, 1910, 931 bis 933. Ann chim. et phys. (8) 22, 1911, 433 bis 440.
[2]) R. Förster, Z. Math. und Phys. 62, 1913/14, 319 bis 327.
[3]) E. Trefftz, Diss., Straßburg 1914. Z. Math. und Phys. 64, 1916, 34 bis 61.
[4]) H. Villat, C. R. Paris, 170, 1920, 653 bis 655.

Einen sehr eigenartigen Weg schlägt Richardson[1]) ein; auch er betrachtet den gleichen Fall der symmetrisch gegen den Strom gestellten Platte und sucht nach Lösungen, die sowohl von der stetigen, wie von der unstetigen Potentialströmung verschieden sind. Er verlangt von seinen Lösungen, daß sie überall stetige Potentialströmung darstellen, außer in einem »Störungsgebiete« hinter der Platte. Er gelangt zu solchen Lösungen, indem er für die Funktion ϱ (s. Gl. (4) S. 400) eine wesentliche Singularität zuläßt. Dadurch entsteht in der Ebene der Strömung ein endliches Gebiet, in dem die Stromlinien sich aufwickeln, sich eine endliche Anzahl von Malen selber schneiden und dann ins Unendliche weiterlaufen. Diesen Verhältnissen kann zwar unmittelbar keine physikalische Bedeutung entsprechen, aber man kann sich das Störungsgebiet durch eine Fläche Γ abgegrenzt und die auf Γ herrschende Druckverteilung gegeben denken, dann gelangt man zu einer Strömung, die außerhalb Γ durchaus Potentialcharakter hat, während innerhalb Γ ein turbulentes Wirbelgebiet anzunehmen ist. Die Funktion

$$\varrho = \frac{i(b+f^{1/2})}{(f-1)^{1/2}}\, e^{\frac{c(f-d)}{(b+f^{1/2})^2}} \qquad (b, c, d \text{ Konstanten}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

mit einer wesentlichen Singularität bei $b - |f^{1/2}| = 0$ liefert ein Beispiel, und es ist bemerkenswert, in welcher Annäherung die wirklichen Verhältnisse auf diese Weise dargestellt werden. Der Widerstand ergibt sich in besserer Uebereinstimmung mit der Erfahrung, als nach der Kirchhoff-Rayleighschen Formel; er hängt von dem Profil des Körpers ab, durch den man die Platte nach hinten fortgesetzt denkt, und außerdem zeigt sich, daß der Druck an einer gewissen Stelle der Rückseite sein Vorzeichen wechselt. Aehnliche Betrachtungen werden auf einen Strahl angewendet,d er aus einem unendlich langen Kanal austritt.

8. Mehrdeutigkeit der Lösungen. Villat[2]) hat die Frage aufgeworfen, ob die stationäre, wirbelfreie Strömung um ein Hindernis herum eindeutig bestimmt ist, wenn die Geschwindigkeit der Strömung im Unendlichen und der Druck in einem Punkte gegeben ist und vorausgesetzt wird, daß die Geschwindigkeit nur an gewissen Flächen unstetig wird und der Druck überall stetig und positiv bleibt. Eine eindeutige Bestimmtheit besteht in der Tat nicht; Villat gibt ein Beispiel, bei dem in einer Klasse von Fällen mindestens zwei Lösungen möglich sind und von vornherein nicht zu entscheiden ist, welche Lösung physikalisch den Vorzug verdient.

Das von Villat betrachtete Hindernis besteht aus zwei aneinander stoßenden Platten, welche die hohle Seite der Strömung entgegenkehren (zweidimensionale Strömung vorausgesetzt). Die Länge der Platten, der Winkel, den sie miteinander bilden und die Orientierung gegen die Strömung sind willkürlich gegeben; die Lage des Staupunktes O, s. Abb. 4, ist dadurch mitbestimmt. Beide Lösungen werden nach der Methode von Levi-Civita gewonnen; bei der ersten Lösung folgt die Stromlinie $\psi = 0$, die sich in O teilt, dem ganzen Verlauf des Hindernisses, d. h. sie verläuft längs OB einerseits, längs OAC andrerseits und bildet dann die freien Linien λ_2 und λ_1. In diesem Falle ist der zugehörige Bereich der ζ-Ebene ein Halbkreis.

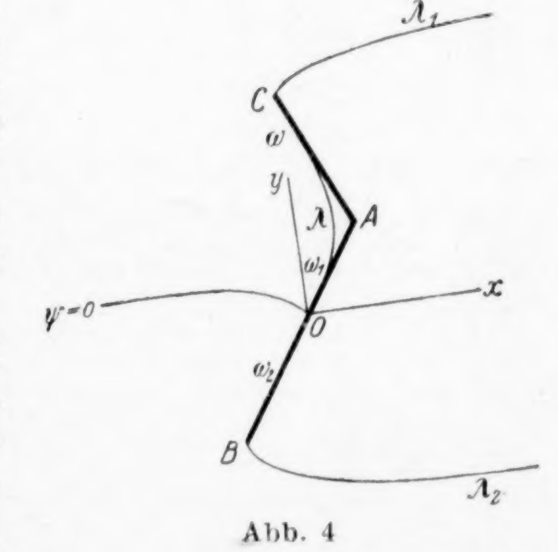


Abb. 4

Bei der zweiten Lösung wird angenommen, daß sich in der Höhlung vor dem Hindernis ein zweites Totwasser bildet, welches durch eine Unstetigkeitslinie λ von der strömenden Flüssigkeit getrennt ist; die Geschwindigkeit längs λ muß konstant und darf höchstens so groß wie auf λ_1 und λ_2 sein. In diesem Falle ist das zugehörige ζ-Gebiet ein halber Kreisring, und zwar entsprechen die Grenzen ω_1 und ω_2 dem äußeren, ω dem inneren Halbkreis. Für die Gültigkeit der Lösung muß ein gewisser Rechenausdruck $U \leq 0$ sein, und Villat zeigt, daß insbesondere im Falle $U = 0$ alle Bedingungen des Problems erfüllt sind und auch keine der von Brillouin aufgewiesenen Schwierigkeiten (s. S. 403) auftritt. So gibt es in der Tat zwei völlig verschiedene Lösungen, die gleich zulässig erscheinen.

[1]) A. R. Richhardson, Phil. Mag 38, 1920, 433 bis 452.
[2]) H. Villat, C. R. Paris, 146, 1913, 442 bis 445. Ann. Ec. Norm. 31, 1914, 455 bis 498.

Später hat **Thiry**[1]) gezeigt, daß auch die Annahme $U < 0$ zu gültigen Lösungen führt; sie bilden eine stetige Folge zwischen den beiden **Villat**schen Fällen und stellen also Lösungen mit wechselnder Größe des vorderen Totwassers dar. Die Untersuchung des Widerstandes für diese Reihe von Lösungen wird angekündigt.

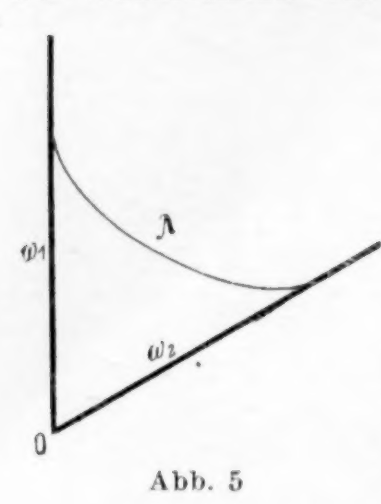


Abb. 5

Die Vieldeutigkeit der Lösung in dem Villatschen Beispiel hat offenbar nichts mit der Form der Strömung hinter dem Hindernis zu tun[2]). In der Tat zeigt eine einfache Rechnung auf Grund der **Kirchhoff**schen Methode, daß bei der Strömung in einer Ecke, die aus zwei Halbebenen besteht, das Auftreten einer Unstetigkeitslinie von der Form λ der Abb. 5 möglich ist. Die Größe des Totwassergebietes in der Ecke bleibt dabei unbestimmt und kann auf 0 zusammenschrumpfen; die einzelnen möglichen Fälle gehen durch Aehnlichkeitstransformation bezüglich des Eckpunktes auseinander hervor. Diese Lösung gilt für jede einspringende Ecke — bei im übrigen beliebiger Begrenzung — in hinreichender Nähe des Eckpunktes und bewirkt daher eine Unbestimmtheit der Lösung in allen diesen Fällen.[3])

Die von **Villat** aufgewiesene Unbestimmtheit der Lösung erscheint von großem theoretischem Interesse. Im Grunde genommen hat schon **Helmholtz** mehrdeutige Lösungen in die Hydrodynamik eingeführt; er selbst gibt (analog wie **Villat**) eine stetige und eine unstetige Behandlung des gleichen Problems, aber seine beiden Lösungen weisen physikalisch einen wesentlichen Unterschied auf: die stetige Lösung führt zu unendlichen Geschwindigkeiten, und das gerade suchte **Helmholtz** durch Annahme der Diskontinuitätsfläche zu vermeiden. In dem **Villat**schen Beispiel sind beide Lösungen — nebst den unendlich vielen dazwischenliegenden — physikalisch zulässig, und erst Betrachtungen, welche die Stabilität oder die innere Reibung betreffen, können — wie **Villat** betont — eine Entscheidung bringen, welche Lösung eine bessere Annäherung an die Wirklichkeit darstellt. Stabilitätsbetrachtungen werden schwerlich zugunsten irgend einer Diskontinuitätsfläche sprechen; in der Tat hat **Lagally**[4]) die mangelnde Stabilität einer ebenen Trennungsschicht rechnerisch erwiesen. Wenn andrerseits die Lage der Unstetigkeitsflächen in der Nachbarschaft von Ecken unbestimmt werden kann, so dürfte schon darin ein Hinweis liegen — ohne jede Berufung auf die Erfahrung —, daß die Gleichungen der idealen Flüssigkeiten zum mindesten für die Nachbarschaft fester Wände einer Ergänzung bedürfen. 101

KURZE AUSZÜGE

Wärme.

Wärmeleitfähigkeit des Wassers zwischen 0 und 80°. Die von **Lundquist**, **H. F. Weber**, **Graetz**, **Chree**, **Lees**, **Miller** und **Chattock** durchgeführten Messungen ergeben Werte für die Wärmeleitfähigkeit des Wassers, die um 10 vH ihres Betrages auseinanderliegen. Sie lassen nicht einmal einwandfrei erkennen, ob diese Wärmeleitfähigkeit mit steigender Temperatur zu- oder abnimmt. Zur Vermeidung bezw. rechnerischen Erfassung der Fehlerquellen aller bisherigen Versuchsanordnungen leitet **Max Jakob** (Ann. d. Phys. 1920, Bd. 63, S. 537—570; Mitteilungen aus der Phys.-Techn. Reichsanstalt) einen Wärmestrom durch eine 2 mm dicke, horizontale Wasserlamelle. Diese befindet sich zwischen zwei mit Thermoelementen ausgerüsteten, 10 mm starken Kupferplatten von 117,5 mm Durchmesser, deren obere einen elektrischen Heizkörper trägt, während die untere auf einem zylindrischen Eisensockel gleichen Durchmessers ruht, der den Wärmestrom in ein Kühlbekken ableitet. Heizkörper, Kupferplatten und oberes Sockelende stecken kolbenartig in einem

[1]) **R. Thiry**, C. R. Paris 170, 1920, 656 bis 658.

[2]) Diesen Gedanken verdankt der Verfasser Hrn. **Schiller**. Man vergl. für das Folgende einen demnächst erscheinenden Aufsatz des Verfassers in der Phys. Zeitschr.

[3]) Der Verfasser hatte bei seinem Vortrag in Jena behauptet, daß eine ähnliche, unbestimmte Lösung auch für die Strömung um eine Ecke existiert. Eine Nachprüfung, die auf Einwände von Herrn Prof. **Prandtl** hin unternommen wurde, ergab die Unhaltbarkeit dieser Behauptung.

[4]) **M. Lagally**, Münch. Ber. 1915, 79 bis 107.

doppelwandigen Vakuumgefäß aus Glas, das oben geschlossen ist und dessen unterer Rand auf dem Kühlbecken ruht. Aus den Abmessungen der Wasserlamelle, aus den Temperaturen der Kupferplatten sowie aus der sekundlich vom Heizkörper gelieferten Wärmemenge kann die Wärmeleitfähigkeit des Wassers der Lamelle berechnet werden, nachdem die Strahlung und diejenige Wärmemenge in Abzug gebracht ist, die ihren Weg zum Kühlbecken nicht der Leitfähigkeit der Lamelle verdankt. (Wärmestrom achsial im Vakuumgefäß, teilweise Verdampfung der Lamelle und Kondensation auf dem Sockel, Wärmespeicherung des Apparates.) Diese in der Bilanz der Messungen zu beachtenden Verluste werden zunächst einzeln durch Vorversuche und Rechnung ermittelt. Ihre errechnete Summe wird nachgeprüft durch eine Messung, bei der sich statt Wasser Luft zwischen den Kupferplatten befindet und die untere Platte durch eine Hilfsheizung auf ihrer Temperatur bei der eigentlichen Leitfähigkeitsmessung erhalten wird.

Nach den Beobachtungen von Jakob kann die Wärmeleitfähigkeit λ des Wassers bei der Temperatur t zwischen 0^0 und 80^0 dargestellt werden auf 1 vH genau durch die Gleichung:

$$\lambda = 0{,}001\,325\ (1 + 0{,}002\,984\ t)$$ im c-g-s-System (cal cm^{-1} sec^{-1} Grad^{-1}),

oder

$$\lambda = 0{,}4769\ (1 + 0{,}002\,984\ t)$$ im technischen Maßsystem (WE. m^{-1} Stunde^{-1} Grad^{-1}).

Zustandsgleichung des Wasserdampfes.

Bei der Besprechung des Buches von H. L. Callendar, Properties of steam and thermodynamic theory of turbines (London 1920) erlaubt sich die englische Zeitschrift Engineering 1921 S. 63—65 und S. 93—94 ein herabsetzendes Urteil über den Wert der deutschen und amerikanischen Untersuchungen auf technisch-thermodynamischem Gebiet und glaubt, wissenschaftlichen Wert nur englischen Arbeiten beimessen zu dürfen. Max Jakob (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1921, S. 568) weist diese unberechtigten Vorwürfe zurück und stellt in bezug auf das Buch von Callendar folgendes fest.

Callendar empfiehlt seine vereinfachte Zustandsgleichung für Wasserdampf:

$$v = 0{,}001 + 46{,}994\ \frac{T}{P} - 0{,}026\,302\ \left(\frac{373{,}1}{T}\right)^{10/3},$$

die für Zustände weitab vom kritischen Druck gelten soll und in der v das spez. Volumen (m^3/kg), P den Druck (kg/m^2), T die absolute Temperatur bezeichnet. Die Aufstellung dieser Zustandsgleichung beruht erstens auf der sicher nicht zutreffenden Annahme, daß der Exponent γ in der Gleichung der Adiabate

$$p\,T^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \text{Const}$$

eine Konstante sei; sie leistet sodann keineswegs mehr als die von H. v. Steinwehr (Zeitschr. f. Physik 1920 S. 466) angegebene Zustandsgleichung

$$Pv = RT \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8P}{RTK_0 e^k\ (T - T_0)}}}\right),$$

worin K_0 die Dissoziationskonstante für $T_0 = 273{,}1$ (67,57 kg/m^3), $k = d\ln K_0/dT = 7{,}0925 \cdot 10^{-3}$, R die Gaskonstante (= 47,06, bezogen auf die Druckeinheit (1 kg/m^2) und die spezif. Volumeneinheit (1 m^3/kg)) bedeutet. Diese Zustandsgleichung von Steinwehr ist jedoch insofern wertvoller, als sie durch rein gastheoretische Überlegungen aus der bewährten Hypothese von Nernst folgt, nach welcher der Wasserdampf aus einfachen und aus Doppelmolekülen besteht, die jede für sich den Gesetzen der idealen Gase gehorchen.

Um Zustandsgleichungen für Wasserdampf auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen, verbindet M. Jakob dieselben mit der Gleichung von Clausius

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{J}\ T\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_P$$

($J = 426{,}9$ mkg/kcal)

und berechnet durch zweimalige Integration c_p. Dies ergibt mit der Zustandsgleichung von Callendar:

$$c_p = (c_p)_0 + 142{,}0610^6\ \frac{1}{J}\ PT^{-13/3},$$

wenn $(c_p)_0$ die spezifische Wärme des Wasserdampfes bei unendlicher Verdünnung bezeichnet. Die c_p-Messungen von Osk. Knoblauch und M. Jakob (Forschungsarbeiten a. d. Gebiet des Ingenieurwesens, herausgeg. vom Ver. deutsch. Ing., Heft 35 und 36) ergeben jedoch längs der c_p-Isotherme keinen linearen Zusammenhang zwischen c_p und P. Die Zustandsgleichung von Callendar hat daher nur als Interpolationsformel Wert. Das Gleiche gilt von der Zustandsgleichung von Steinwehr und allgemein von allen Zustandsgleichungen, die auf v-Messungen gegründet werden. Nach Vorschlag von Jakob (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 1980) ist es besser, bei der Aufstellung von Zustandsgleichungen für Wasserdampf von c_p-Messungen auszugehen. Eichelberg (Forschungsarbeiten a. d. Gebiet des Ingenieurwesens, herausgeg. vom Ver. deutsch. Ing., Heft 220) gibt als sehr brauchbare Interpolationsformel im Bereich bis 20 at und 400^0 auf Grund der neuesten c_p-Messungen:

$$c_p = (c_p)_0 + C_1\ \frac{P}{T^4} + \frac{C_2\ (P + 2 \cdot 10^4)^{3,2} - C_3}{T^5}$$

$(C_1 = 3{,}2 \cdot 10^4;\quad C_2 = 2{,}83 \cdot 10^{22};\quad C_3 = 1{,}64 \cdot 10^{36})$

und

$$(c_p)_0 = 0{,}345 + 0{,}000\,197\ T + \frac{5500}{T^2}.$$

Diese ergibt als Zustandsgleichung für Wasserdampf

$$v = 47{,}06\ \frac{T}{P} - \frac{1{,}139}{\left(\frac{T}{100}\right)} - \frac{11615\ (P \cdot 10^{-4} + 2)^{2,2}}{\left(\frac{T}{100}\right)^4}.$$

Die hieraus berechneten Werte für v stimmen mit direkten Beobachtungen von v sehr gut überein.

Wärmekonvektion in Strömungen und mechanische Aehnlichkeit. Die Wärmemenge (h), die eine strömende Flüssigkeit einem festen Körper pro Zeit- und Oberflächeneinheit durch Konvektion entzieht, ist zu berechnen aus den Fourier'schen Differentialgleichungen für den Wärmefluß in Verbindung mit den hydrodynamischen Differentialgleichungen. Da die Integration dieses Gleichungssystemes nur in den allereinfachsten Fällen gelingt und da beim Studium rein hydrodynamischer Vorgänge Modellversuche sich bewährt haben, liegt es nahe, die Wärmeabfuhr durch Konvektion ebenfalls aus Modellversuchen zu ermitteln. Dazu ist Voraussetzung, daß die Strömungen um den Körper und um sein geometrisch ähnliches Modell mechanisch und thermisch ähnlich sind. Diese Ähnlichkeit findet ihren Ausdruck in der zahlenmäßigen Übereinstimmung gewisser dimensionsloser Zahlen für die wirkliche und für die Modellströmung. Man findet den Aufbau dieser Zahlen aus einer Längserstreckung (l) des Körpers, aus der Geschwindigkeit (v) und aus den Materialkonstanten der Flüssigkeit (Wärmeleitfähigkeit (λ), spezifische Wärme (c), Wärmeausdehnungszahl (α), kinematische Zähigkeit (ν), Erdschwere (g), sowie aus dem Temperaturunterschied (Θ) zwischen Körper und Flüssigkeit, indem die Differentialgleichungen durch neue Variable von den Einzelwerten l, v, λ, c, α, g, ν, Θ befreit werden und dieselben nur in dimensionslosen Kombinationen enthalten. Der für alle geometrisch ähnlichen Körper gleiche, funktionale Zusammenhang (F) zwischen diesen dimensionslosen Zahlen kann aus Modellversuchen gewonnen werden. (A. H. Davis, Philos. magaz. 40, 1920, S. 692—703.)

1. Wärmekonvektion in selbständigen Strömungen, die ohne äußere Kräfte nur infolge der innerhalb der Flüssigkeit herrschenden Temperatur- und Dichteunterschiede entstehen (natural convection). Bei Vernachlässigung der Volumenänderungen in der Strömung gilt:

$$\frac{hl}{\lambda\Theta} = F\left\{\frac{\alpha g c^2 l\Theta}{\lambda^2};\ \frac{c\nu}{\lambda}\right\} \quad . \ . \ . \ (A)$$

Versuche in Wasser mit Kugeln und Zylindern bestätigen (A). Größe und Temperatur der Versuchskörper wurden dabei so variiert, daß $l^3\Theta = \text{const.}$ Ist das Volumen des Körpers von gleicher Größenordnung wie die Volumenänderungen in der Flüssigkeit, so gilt (A) nicht (sehr dünne Drähte). Für beliebige Körperform kann in erster Näherung

$$\frac{hl}{\lambda\Theta} = \left(\frac{\alpha g c^2 l^3 \Theta}{\lambda^2}\right)^{0,233}$$

gesetzt und der Einfluß der Zähigkeit vernachlässigt werden.

2. Wärmekonvektion in unselbständigen Strömungen, die von äußerenKräften hervorgerufen werden (forced convection). Von der Konvektion infolge selbständiger Strömungen kann dabei abgesehen werden. Es ist:

$$\frac{hl}{\lambda\Theta} = F\left\{\frac{lv}{\nu};\ \frac{c\nu}{\lambda}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (B),$$

$\frac{lv}{\nu}$ ist die Reynoldssche Zahl. (B) gilt für nicht turbulente und für turbulente Strömungen; F ist jedoch für beide Zustände verschieden. Die Resultate von Versuchen in strömender Luft an Kugeln, Zylindern und dünnen Drähten (bis herab zu 0,003 cm) sind in guter Übereinstimmung mit (B).

Wärmeabfuhr und Luftwiderstand dünner Drähte. Die Messungen der Wärmemenge H, die ein Luftstrom in der Zeiteinheit von der Längeneinheit Eins eines dünnen Drahtes abführt, wenn der Temperaturunterschied zwischen Draht und Luft ein Grad beträgt, lassen sich zusammenfassen durch die Gleichung:

$$\frac{H}{\lambda} = B\sqrt{\frac{lv}{\nu}} + C,$$

worin B und C von der Temperatur und dem Drahtdurchmesser nahezu unabhängig sind. Davis (Philos. magaz. 41, 1921, S. 899—908) $(0,1 < \frac{lv}{\nu} < 10^4)$. Durch Vergleich mit den Messungen des Luftwiderstandes W dünner Drähte (Technical Report of the Advisory Committee for Aeronautics for 1913—14) findet Davis den Zusammenhang

$$H \sim \frac{W}{\nu^{1,45}}\,.$$

Warnemünde. E. Pohlhausen. 34.

BUCHBESPRECHUNGEN

P. **STEPHAN,** Ing., Regierungsbaumeister, Professor: Die technische Mechanik des Maschineningenieurs. 1. Band: Allgemeine Statik. Julius Springer, Berlin. 1921. 160 S., 300 Abbildungen.

Das Buch stellt sich die Aufgabe, sowohl dem Anfänger eine Einführung in das Gebiet der angewandten Mechanik, als auch dem Maschineningenieur einen Überblick zu bieten und zieht hierfür Aufgaben heran, die in der Zeitschriftenliteratur verstreut sind. Die letztgenannte Absicht ist sicherlich besonders dankenswert und scheint auch recht gut erreicht zu sein. Freilich wird sich die Auswahl der Beispiele erst nach dem Erscheinen der weiteren Bände beurteilen lassen, die die Statik der Maschinenteile, die Dynamik starrer Körper und die Festigkeitslehre bearbeiten sollen. Im vorliegenden ersten Band sind hauptsächlich Aufgaben aus der Baustatik und dem

Hebezeugbau herangezogen worden, während andere Anwendungsgebiete der Statik wohl dem zweiten Band vorbehalten wurden.

Ob es überhaupt gelingen kann, in so kleinem Rahmen ein Werk zu schaffen, das gleichzeitig ein Lehrbuch für Anfänger und ein Nachschlagebuch für praktisch arbeitende Ingenieure bildet, muß bezweifelt werden. Denn nach Ansicht des Unterzeichneten erfordert die Einführung in die Mechanik höchste Schärfe der Darstellung, für die besonders die Jugend empfindlich ist und die in einem derartigen Büchlein keineswegs erreicht werden kann. Hingegen ist es als Handbuch für den Ingenieur, der im Laufe seiner praktischen Tätigkeit manches vergessen hat, gewiß sehr empfehlenswert.

Auf Einzelheiten einzugehen, würde zu weit führen. Wenn sich jedoch der Verfasser auf das letztgenannte Ziel beschränken würde, könnten vielfach die heiklen Definitionen wegbleiben. Aber auch in diesem Falle wäre zu wünschen, daß in Beispielen stets die Vernachlässigungen und Vereinfachungen angegeben und daß die den Aufgaben zugrunde gelegten Skizzen stellenweise deutlicher wären. So führt in Beispiel 74 wohl die Unklarheit der Zeichnung zu unrichtigen Ansätzen (G_3 wirkt nur zur Hälfte auf V und im anderen Sinne auf das Drehmoment). Unklar ist auch z. B. der letzte Absatz des Beispiels 86 ausgedrückt, zum Teil, weil die Formulierung der Aufgabe unvollständig ist. Im allgemeinen könnten die Grundsätze für die Bestimmung der Auflagerkräfte deutlicher zusammengefaßt sein, denn gerade hier werden von Anfängern oder Ungeübten leicht Fehler gemacht. Die Zusammensetzung von Drehmomenten sollte in der üblichen anschaulichen Weise durch Aneinanderreihung ihrer Achsen erfolgen, auch könnte z. B. darauf ausdrücklich hingewiesen werden, daß es bei starren Körpern wirklich einen Schwerpunkt für alle Lagen gibt usw. Die formale Wendung: Auflösung der Klammer $d\,(b + x)$ auf Seite 104 sollte vermieden werden.

Trotz der erwähnten kleinen Beanstandungen, die ja nur gelegentlich herausgegriffen sind, erscheint das Büchlein sehr empfehlenswert, besonders für jene, die sich die allgemeinen praktischen Kenntnisse aus der allgemeinen Mechanik rasch wieder ins Gedächtnis zurückrufen und sie an guten Beispielen erproben wollen. Die vorzügliche Ausstattung ist dem bewährten Verlage Springer zu verdanken.

Prag. K. Körner. 97.

A. E. H. **LOVE,** Theoretische Mechanik, eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien der Mechanik. Übersetzung der zweiten Auflage von Dr.-Ing. Hans Polster, Berlin, J. Springer, 1920. **424 S.**

Daß dieses Buch nun auch in deutscher Sprache erscheint, möchte ich aus folgenden Gründen begrüßen. Zunächst ist es ein Buch, das zum Denken anregt. Der Verfasser macht es nicht so wie manche andere, die schnell über die schwierigen Fragen der Begründung hinweggehen, um zu dem Stoff zu kommen, im Gegenteil, Love geht behutsam, ständig in Fühlung mit der Beobachtung und immer nachprüfend vor und bringt erst am Schluß eine sehr lesenswerte Zusammenstellung der Grundsätze der Mechanik. Das Verfahren ist also stark induktiv, der Standpunkt dem Machs sehr ähnlich. Vielleicht nicht gerade tief, aber besonnen und klug möchte man das Buch nennen.

Dann liebe ich das Buch wegen der geschickten Auswahl des Stoffes. Es steht gerade alles darin, was man zunächst einmal, vom Standpunkte der Allgemeinbildung angesehen, von der Mechanik der Punkte, der starren Körper und der Systeme aus solchen, wissen muß. Spezifisch technische Anwendungen treten etwas zurück.

In dritter Linie schätze ich an dem Buch die Konsequenz und saubere Durcharbeitung der Methode. Die sogenannten elementaren (man sagt vielleicht besser synthetischen Methoden, im Gegensatz zu den analytischen Methoden Lagranges) werden ausschließlich benutzt, aber bis zu einer gewissen Virtuosität ausgebildet. Der Leser, der dieses Buch durcharbeitet, lernt wirklich Mechanik. Dazu tritt ein vierter Vorzug des Buches, der außerordentliche Reichtum an Übungsaufgaben.

Als Kapitel, die besonders reichhaltig behandelt werden, nenne ich die Lehre vom Stoß, den Abschnitt über „beginnende Bewegungen", wohl eine Besonderheit des Buches, die zweidimensionale Bewegung der starren Körper und Körpersysteme. Es fehlen: Die Bewegung starrer Körper im Raume, die analytischen Methoden und die spezifisch technischen Anwendungen. Die Übersetzung ist gut und lesbar, die Ausstattung durch den Verlag wieder normal.

Hamel. 66.

R. **SEELIGER** in Verbindung mit F. **HENNING** und R. v. **MISES,** Aufgaben aus der theoretischen Physik. Braunschweig 1921, Vieweg & Sohn. 154 S.

Dieses 154 Seiten starke Büchlein enthält etwa je 100 Aufgaben aus der Vektorrechnung, der Mechanik, über Elektrizität und Magnetismus, aus der Wärmelehre und aus der Optik. Dazu die Lösungen, die für die Vektorrechnung, die Mechanik und die Wärmelehre ziemlich ausführlich, für die anderen Gebiete nur kurz gegeben sind. Die Aufgaben aus der Vektorrechnung und Vektoranalysis sind durchweg ziemlich elementar und recht geeignet, den Stoff einzuüben. Außerordentlich sorgfältig ist die Auswahl der Aufgaben aus der Mechanik; jede dieser Aufgaben hat wirkliche mechanische Bedeutung. Die Aufgaben sind nicht zu leicht und nicht zu schwer. Sachlich werden wohl alle Gebiete der Mechanik berührt, methodisch der

elementare Weg bevorzugt. (Die analytischen Methoden treten zurück, dementsprechend die astronomischen und spezifisch physikalischen Beispiele.) Da hier in erster Linie technisch und allgemein interessante Fragen berührt werden, dürfte dieser Teil des Buches besonders bei den Lesern dieser Zeitschrit Beachtung finden.

Über die anderen Teile des Buches muß ich mich als nicht spezieller Fachmann naturgemäß zurückhaltender aussprechen. Ich glaube aber sagen zu können, daß die für den Anfänger wichtigsten Lehren überall berücksichtigt und daß die Aufgaben gewählt sind, die sowohl den eigentlichen Physiker wie auch den Ingenieur interessieren. Im Ganzen füllt das Buch eine Lücke aus und ist willkommen.

Hamel. 65.

KLEINE MITTEILUNGEN

Miscellen zur politischen Arithmetik.

1. Die Grundgleichung der Zinseszinsrechnung. Die allgemeine — auf kontinuierliche Verzinsung aufgebaute — Zinseszinsrechnung verwertet für ihre Grundgleichung den verallgemeinerten Potenzbegriff und macht keinen Unterschied zwischen den Fällen der ganzzahligen und der nichtganzzahligen Perioden. Neben dieser sog. exponentiellen Auffassung verwendet die in der Praxis meistens übliche sog. kommerzielle Rechnungsweise die einfache Zinsrechnung für die Bruchteilperioden. Diese letzte Methode kann als eine erste Approximation des allgemeinen Verfahrens angesehen werden und hat den Vorteil, daß für sie die sog. Zinseszinstabellen direkt angewendet werden können.

Mit den theoretischen und numerischen Folgen dieser Gegenüberstellung hat sich die Literatur der politischen Arithmetik des öfteren beschäftigt.[1] Wir zeigen im folgenden, daß die Diskussion in elementarer Weise geschehen kann, wenn wir das Problem als eine Mittelwertinterpolation deuten, und daß alle Entscheidung von der Auswahl des betreffenden Mittelwertes abhängt. Demnach braucht dann kein Streit über die Berechtigung der beiden Auffassungsweisen geführt zu werden und auch die bekannten Vergleichsformeln folgen ohne die in der Literatur vorzufindenden recht weitläufigen Ansätze, aus dem einfachen Lagengesetz der Mittelwerte.

Wir betrachten die Zinsfunktion $f(x)$ an einer Zwischenstelle des ganzzahligen Intervalles $n, n+1$. Es sei gegeben

$$f(n) = a \quad \text{und } f(n+1) = b$$

und gesucht $f(n+z)$, wobei $z < 1$.

Die einfachsten Mittelwertinterpolationsformeln[2] sind die folgenden:

a) Arithmetische (lineare) Interpolation:

$$f_1(n+z) = a + z(b-a) = (1-z)\,a + z\,b$$

(gewogener arithmetischer Mittelwert der gegebenen Endwerte).

b) Harmonische (hyperbolische) Interpolation:

$$f_2(n+z) = \frac{1}{\frac{1-z}{a} + \frac{z}{b}} = \frac{ab}{za + (1-z)\,b}$$

(gewogener harmonischer Mittelwert).

c) Geometrische (exponentielle) Interpolation:

$$f_3(n+z) = a^{1-z}\, b^z$$

(gewogener geometrischer Mittelwert).

Diese Mittelwerte ergeben für den Wert $z = 1/2$ die einfachen Mittel. Es gilt das Lagengesetz:

$$f_2 < f_3 < f_1.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß im Falle

a) der kommerziellen Methode, dekursiv gerechnet, eine arithmetische Interpolation,

b) der kommerziellen Methode, anticipativ gerechnet, eine harmonische Interpolation,

c) der exponentiellen Methode, dekursiv gerechnet, eine geometrische Interpolation,

d) der exponentiellen Methode, anticipativ gerechnet, eine geometrische Interpolation

erfolgt.

Beweis: Es sei

$$f(n) = a = 1$$

und p der auf die Einheit bezogene dekursive, q der gleichwertige anticipative Zinsfuß (wobei bekanntlich $q = \frac{p}{1+p}$). Dann ist:

dekursiv gerechnet: $a = 1,\ b = 1 + p$ (dekursiver Zinsfaktor),

anticipativ gerechnet: $a = 1,\ b = \frac{1}{1-q}$ (anticipativer Zinsfaktor).

Wir erhalten in den vier Fällen:

a) $f_1(n+z) = 1 - z + z(1+p) = 1 + pz$

b) $$f_2(n+z) = \frac{\frac{1}{1-q}}{z + \frac{1-z}{1-q}} = \frac{1}{1-qz}$$

[1] S. meinen Aufsatz in der Oesterreichischen Handelsschulzeitung V (1913) und King: The theory of finance I. 16.

[2] S. den Aufsatz von Landré im Assekuranz-Jahrbuch (Ehrenzweig) XXIV (1903).

c) $f_3(n+z) = (1+p)^z$

d) $f_3(n+z) = \frac{1}{(1-q)^z}$.

Es ist weiterhin: c) < a) und d) > b), aus dem Lagengesetz folgend. Bei gleichwertigen Zinsfüßen liefert a) den größten und b) den kleinsten Effekt.

In der politischen Arithmetik verfügt man neben der I. Tabelle (Potenzen der Zinsfaktoren) auch über die reciproke II. Tabelle. Einer $\frac{\text{arithmetischen}}{\text{geometrischen}}$ Interpolation in der reciproken Tabelle entspricht eine $\frac{\text{harmonische}}{\text{geometrische}}$ Interpolation in der I. Tabelle. In dieser Weise ist entweder eine geometrische Interpolation zu empfehlen oder man nimmt zweckmäßig den einfachen arithmetischen Mittelwert aus den beiden arithmetisch interpolierten Werten der Tabelle I resp. II.

Wir haben bisher den Fall der Aufzinsung betrachtet. Bei der Diskontierung treten die reciproken Werte des Aufzinsungsfaktors ein, so daß an Stelle des arithmetischen Mittelwertes der harmonische zu nehmen und der Sinn der obigen Ungleichungen zu ändern ist.[1])

2. Die Mosersche Zinsformel. In den autographierten Berner Vorlesungen von Chr. Moser findet man für die einfache Zinsrechnung die folgende korrigierte Formel:

$$f(n+z) = 1 + pz - (1-z)\,zp^2,$$

die als eine parabolische Interpolation gelten kann.[2]) Diese Formel gehört nicht dem oben betrachteten Mittelwerttypus an und ist nicht einwandfrei, da das Anfangsglied dekursiv, das Korrektionsglied aber anticipativ angesetzt wird. Das Zusatzglied soll den einfachen Zins des aufgezinsten Wertes für die Periode $1-z$ darstellen. Wenn wir nun auch die Korrektion dekursiv berechnen, so erhalten wir die folgende Interpolationsformel:

$$f(n+z) = 1 + pz - \frac{pz^2(1-z)}{1+p(1-z)} = \frac{1+p}{1+p(1-z)}$$

$$= \frac{1+p}{z+(1-z)(1+p)}.$$

Der letzte Ausdruck zeigt, daß auf diese Weise eine harmonische Interpolation zwischen den Endwerten 1 und $1+p$ erfolgt; man erhält also kleinere Werte als bei der gewöhnlichen dekursiven kommerziellen Methode und größere Werte als mit der gemischten Moserschen Formel. (Für die anticipative Auffassung wäre eine entsprechende arithmetische Interpolation aus den Werten 1 und $\frac{1}{1-q}$ zu konstruieren.)

3. Rentabilitätsberechnung langfristiger Geschäfte. Die Zinsfußbestimmung der Rentenrechnung führt auf algebraische Gleichungen höherer Ordnung, welche in den wichtigsten Fällen der Praxis spezielle drei-, vier- und fünfgliedrige Gleichungen sind.[1]) Den Fall der trinomischen Gleichung haben wir in einem früheren Aufsatze[2]) vom Standpunkte der angewandten Mathematik ausführlich dargestellt. Im folgenden soll der Fall einer fünfgliedrigen Gleichung behandelt werden, und zwar nach einer besonders einfachen Methode von Steffensen[3]), die besonders brauchbare numerische Resultate liefert. (Dasselbe Problem haben mit viel komplizierteren Mitteln bereits Boggio und Bottaso gelöst[4]).)

Das Steffensensche Verfahren geht von der kontinuierlichen Rente $(\bar{a})$ aus, deren allgemeine Gleichung die folgende ist:

$$\bar{a} = \int_0^n F(t)\, v^t\, dt,$$

wo $F(t)$ eine gegebene Funktion, $v = \frac{1}{1+p}$ bedeutet. Indem man das Integral durch eine entsprechende Quadraturformel approximiert, erhält man an Stelle der ursprünglichen eine einfachere Gleichung für v, in der noch an Stelle des kontinuierlichen Wertes der zur Aufgabe gehörende gewöhnliche Rentenwert einzuführen ist. Dieser letzte Schritt erfolgt am besten mittels der Euler-Maclaurinschen Summenformel. Der Vorteil dieser Methode ist, daß auch kompliziertere Fälle einheitlich zu erledigen sind, der Fehler durch das Restglied abzuschätzen und das Verfahren

[1]) Ueber die Anwendung der Mittelwertprozesse in der Bevölkerungsstatistik und in der Zinsrechnung siehe den Aufsatz des Verfassers in der Skandinavisk Aktuarietidskrift 1920, wo auch der Inhalt dieser Miscelle bereits angedeutet wurde. Es wird ferner darauf hingewiesen, daß mit allgemeinen Mittelwertansätzen noch weitere Formeln abzuleiten sind.

[2]) S. z. B. Barriol: Théorie et pratique des opérations financières (Paris, Doin, Encyclop. scientif. 1908), S. 5.

[1]) Einige Beispiele: a) dreigliedrige Gleichung: gewöhnliche Zinsfußprobleme der Rentenrechnung, Rentabilität von amortisabeln Obligationen, in geometrischer Progression variable Rente. b) viergliedrige Gleichung: aufgeschobene Rente, im Nennwert zurückzuzahlende Schuld bei gegebenem Kurs (s. v. Mangoldt in Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung IX [1900]). c) fünfgliedrige Gleichung: in arithmetischer Progression variabele Rente, Amortisation mit Provisionsquote bei gegebenem Kurs, arithmetische Tilgung bei gegebenem Kurs, Rentabilität von Obligationen bei Berücksichtigung der Kosten.

[2]) Zeitschrift für Mathematik und Physik 59, 1911.

[3]) The Journal of the Institute of Actuaries 50 (1916).

[4]) In den Abhandlungen der Turiner Akademie 1909 und 1910.

mit genaueren Formeln zu verfeinern ist. Steffensen behandelt den trinomischen Fall; die vier- und fünfgliedrige Gleichung, dann der allgemeine Ansatz einer nach ganzer rationaler Funktion variabeln Rente sind in gleicher Weise zu erledigen. Das Verfahren ist stets anwendbar, wenn der Uebergang zur kontinuierlichen Rente keine neue Schwierigkeit mit sich bringt.

Als Beispiel führen wir das Problem an, die Rentabilität einer in arithmetischer Progression veränderlichen Rente zu bestimmen, welche auf eine fünfgliedrige Gleichung führt. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall der sog. natürlichen Rente (increasing annuity), bei welcher das Anfangsglied und der Steigerungssatz $= 1$ sind. Der Wert dieser Rente, z. B. bezogen auf den Zeitpunkt: eine Periode vor Fälligkeit des ersten Rentengliedes, ist folgender:

$$A = \frac{1 - v^n}{p} + \frac{1 - v^n}{p^2} - \frac{n v^n}{p}.$$

Dies liefert für v die fünfgliedrige Gleichung:

$$n v^{n+2} - (n+1) v^{n+1} - A v^2 + (2A + 1) v - A = 0,$$

welche außer der trivialen Lösung $v = 1$ noch eine positive Wurzel besitzt.

Die entsprechende kontinuierliche Rente kann mit der einfachen Simpsonschen Formel (ohne Restglied) approximiert werden:

$$\overline{A} = \int_0^n t v^t \, dt = n^2 \int_0^1 t v^{nt} \, dt = \frac{n^2}{6}\left(2 v^{\frac{n}{2}} + v^n\right).$$

Aus der Euler-Maclaurinschen Summenformel folgt als erste Approximation:

$$A = \overline{A} + \frac{n}{2} v^n \cdot$$

Wir erhalten somit als erste Approximation für v die Gleichung:

$$n(n+3) v^n + 2 n^2 v^{\frac{n}{2}} - 6 A = 0,$$

aus der für die nicht triviale positive Wurzel folgt:

$$\log v = \frac{2}{n}\left[\log\left(\sqrt{n^2 + 6A + \frac{18A}{n}} - n\right) - \log(n+3)\right]$$

Dieses Verfahren kann mit einer mehrgliedrigen Quadraturformel und mit einer schärferen Approximation verfeinert werden. 57

Budapest. K. Goldziher.

Zur Berechnung von steifen Rahmentragwerken mit Momentengleichungen. In seinem Buche „Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes" (Berlin 1918) stellt Herr F. Bleich bei ebenen Rahmentragwerken unter Hinzufügen der Stabdrehwinkel als neue Unbekannte zu den stereostatisch unbestimmten Größen, die Elastizitätsbedingungen in Form von sogenannten Viermomentengleichungen und Winkelgleichungen auf, die dem Clapeyronschen Momententheorem des durchlaufenden Balkens entsprechen[1]). Bei Rahmensystemen mit durchwegs steifen Knoten kann man nun die neuen Unbekannten des Herrn Bleich von vornherein eliminieren und dadurch die Berechnung mittels Momentengleichungen allein erzielen, deren soviele aufgestellt werden, als überzählige vorhanden sind. Die so entstehenden Gleichungen sind aber — wie nicht anders zu erwarten ist — die bekannten Elastizitätsbeziehungen, von denen für jeden geschlossenen Rahmen drei angesetzt werden und die ausdrücken, daß bei jeder Formänderung ein geschlossener Rahmen zusammenhängend bleibt[2]). Wir wollen nun ganz im Sinne des Bleichschen Verfahrens vorgehen.

Die erste Momentengleichung. Der geschlossene ebene Rahmen von n-Seiten (und sonach n-Ecken oder Knoten) der Abb. 1,

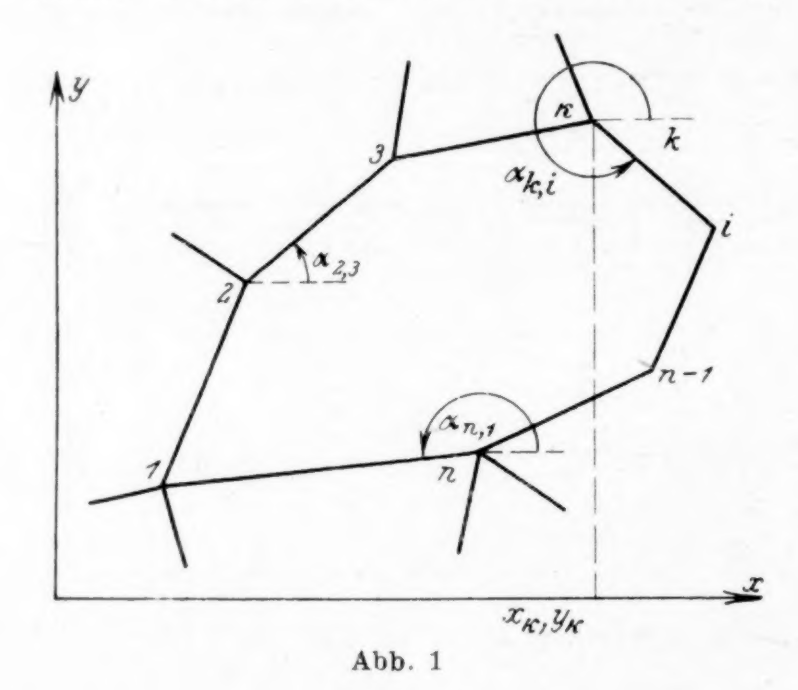


Abb. 1

bei dem in jeder Ecke eine beliebige Anzahl von Stäben endet, ist in seiner Ebene irgendwie belastet. Wir betrachten einen Stab zwischen den Knoten k und i von der Länge $S_{k,i}$ $(= S_{i,k})$; nach der zufolge des Kraftangriffes entstehenden Formänderung habe die Sehne des Stabes die Lage $k' i'$ (Abb. 2). Es bezeichne für den Knoten k: $\delta_{k,i}$ $(= \delta_{i,k})$ den Stabdrehwinkel, d. h. den Winkel zwischen der ursprünglichen und der neuen Stabsehne, φ_k den Knotendrehwinkel, d. h. den Winkel, um den sich die Tangente an die Stabrichtung bei der Formänderung gedreht hat und $\tau_{k,i}$ den Ablenkungswinkel der neuen Tangente von der neuen Sehne. Der positive Drehsinn für δ und φ ist der Uhrzeigersinn von der ursprünglichen Richtung zur neuen Richtung und für τ von der neuen Sehne zur neuen Tangente.

Es ist natürlich $\tau_{i,k}$ der Ablenkungswinkel des Stabes $S_{i,k}$ $(= S_{k,i})$ im Knoten i. Sind

[1]) Auch: Der Viermomentensatz und seine Anwendung auf die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke, Der Eisenbau 1917, S 46 bis 61.

[2]) Siehe H. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, 4. Aufl., Leipzig 1913, S. 124.

für den Stab $S_{k,i}$ die Knotenmomente (d. h. die Werte des Biegungsmomentes am Ende k bzw. am Ende i) $M_{k,i}$ und $M_{i,k}$, so bestehen die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{k,i} = \left(\frac{2\,M_{k,i} + M_{i,k}}{6}\,S_{k,i} + \frac{\mathfrak{S}_{i,k}}{S_{k,i}}\right)\frac{1}{E\,J_{k,i}} \\ \text{und} \\ -\tau_{i,k} = \left(\frac{2\,M_{i,k} + M_{k,i}}{6}\,S_{k,i} + \frac{\mathfrak{S}_{k,i}}{S_{k,i}}\right)\frac{1}{E\,J_{k,i}} \end{array}\right\} \quad (1),$$

die sich als die durch $EJ_{k,i}$ dividierten Auflagerreaktionen eines auf zwei Stützen gelagerten, mit der Momentenfläche belasteten Stabes $S_{k,i}$ ergeben. E ist der für alle Stäbe konstante Youngsche Modul (Elastizitätsmodul) des Stabmaterials, $J_{k,i}$ $(= J_{i,k})$ das Querschnittsträgheitsmoment von $S_{k,i}$ bezüglich der wagrechten Schwerachse, die als eine Hauptachse vorausgesetzt ist, $\mathfrak{S}_{i,k}$ und $\mathfrak{S}_{k,i}$ sind die statischen Momente der Momentenfläche des einfachen Balkens $S_{k,i}$ für den Knoten i bzw. k. Die Eckmomente sind im Sinn einer Vergrößerung der Deformation positiv gezählt.

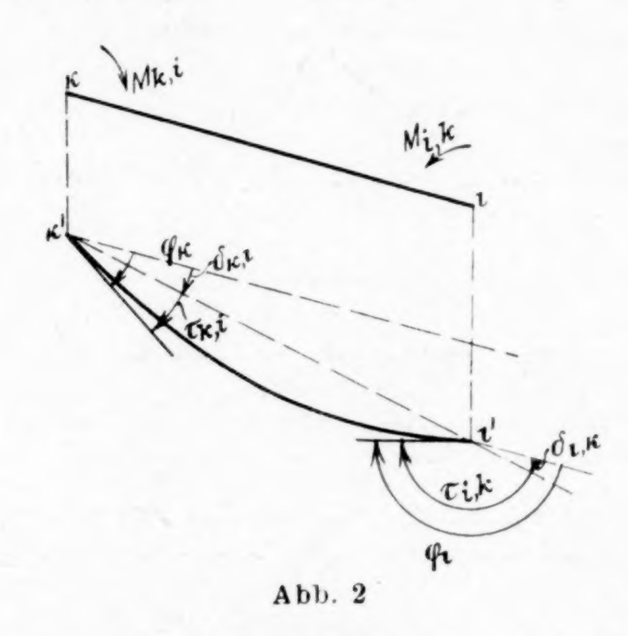


Abb. 2

Infolge der steifen Verbindung drehen sich in einem Knoten alle Stäbe um denselben Winkel, d. h. es gilt

$$\varphi_k = \tau_{k,i} + \delta_{k,i} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

für $i = 1$ bis $i = r$, wenn r-Stäbe in der Ecke k zusammentreffen. Durch Gleichsetzen von φ für zwei in k endende Stäbe gewinnt man in Hinblick auf (1) die vorerwähnte Viermomentengleichung, die die vier Endmomente und die zwei Stabdrehwinkel enthält. Wir wollen jetzt wie folgt verfahren. Wir stellen für den geschlossenen Rahmen der Abb. 1 an Viermomentengleichungen auf:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{im Knoten } 1: & \tau_{1,2} + \delta_{1,2} = \tau_{1,n} + \delta_{1,n} \\ \quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad 2: & \tau_{2,3} + \delta_{2,3} = \tau_{2,1} + \delta_{2,1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad n-1: & \tau_{n-1,n} + \delta_{n-1,n} = \tau_{n-1,n-2} + \delta_{n-1,n-2} \\ \quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad n: & \tau_{n,1} + \delta_{n,1} = \tau_{n,n-1} + \delta_{n,n-1} \end{array}\right\} (3)$$

und summieren alle diese Gleichungen.

Dadurch entsteht

$$\tau_{1,2} - \tau_{2,1} + \tau_{2,3} - \tau_{3,2} + \ldots\ldots + \tau_{n-1,n} - \tau_{n,n-1} + \tau_{n,1} - \tau_{1,n} = 0 \quad . . (4)$$

und mit Gl. (1) nach Multiplikation mit einem willkürlichen Trägheitsmoment J_c

$$(M_{1,2} + M_{2,1})\,l_{1,2} + (M_{2,3} + M_{3,2})\,l_{2,3} + \ldots + (M_{n,1} + M_{1,n})\,l_{n,1} = -2\,J_c \sum \frac{\mathfrak{M}_{k,i}}{J_{k,i}} \quad . . (5).$$

Hierbei bedeuten $l_{k,i}$ die „reduzierte Länge", $S_{k,i}\,\frac{J_c}{J_{k,i}}$ und $\mathfrak{M}_{k,i}$ die Momentenfläche der angreifenden Kräfte für den einfachen Balken $S_{k,i}$; die Summe auf der rechten Seite von Gl. (5) ist über sämtliche Stäbe auszudehnen. Diese Gleichung ist die erste Momentengleichung; sie bildet eine Beziehung zwischen allen Eckmomenten (wir können auch jede beliebige Stelle des Rahmens als Ecke ansehen) und den äußeren Lasten. Man sieht unmittelbar, daß dies die Gleichung

$$\int M\,\frac{ds}{J} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5')$$

ist, wobei M das auf das Element ds wirkende Biegungsmoment ist und sich das Integral über den geschlossenen Rahmen erstreckt.

Die zweite und dritte Momentengleichung. Daß der Rahmen geschlossen ist, wird durch die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \sum S_{k,i} \cdot \cos\alpha_{k,i} = 0 \\ \text{und} \\ \sum S_{k,i} \cdot \sin\alpha_{k,i} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

ausgedrückt, mit ihren Summen über sämtliche Stäbe. Dabei bezeichnet $\alpha_{k,i}$ $(= \alpha_{i,k})$ den Neigungswinkel von $S_{k,i}$ gegen eine beliebige, bezüglich eines Stabes festgelegte Richtung x; er wird gezählt am niedriger bezifferten Stabende von der positiven x-Richtung im Gegenuhrzeigersinn zum Stab (vgl. Abb. 1). Die Aenderung des Winkels α bei der Deformation ist gleich dem negativen Stabdrehwinkel, und man gewinnt mit Annahme einer Aenderung der Stablänge S um ΔS (z. B. positiv bei Verlängerung, negativ bei Verkürzung) durch Differentiation der Gleichungen (6) und Einführen der wirklichen Aenderungen die beiden Winkelgleichungen [1])

$$\sum \delta_{k,i}\,S_{k,i} \sin\alpha_{k,i} + \sum \Delta S_{k,i} \cdot \cos\alpha_{k,i} = 0 \quad . . (7)$$
$$\sum \delta_{k,i}\,S_{k,i} \cos\alpha_{k,i} - \sum \Delta S_{k,i} \cdot \sin\alpha_{k,i} = 0 \quad . . (8).$$

Sie sind die Bedingung, daß der Rahmen auch nach der Formänderung geschlossen bleibt. Wir betrachten jetzt unsere x-Achse, die man zur Vereinfachung mit einem Stab zusammenfallen lassen kann, als die eine Achse eines cartesischen Koordinatensystems, bezeichnen die Koordinaten eines Knotens k mit x_k und y_k und schreiben die Gleichungen (7) und (8)

$$\sum \delta_{k,i}\,(y_i - y_k) + \sum \Delta S_{k,i} \cdot \cos\alpha_{k,i} = 0 \quad . . (7')$$
$$\sum \delta_{k,i}\,(x_i - x_k) - \sum \Delta S_{k,i} \cdot \sin\alpha_{k,i} = 0 \quad . . (8').$$

[1]) Vgl. F. Bleich in seinem eingangs zitierter Buche S. 16 bis 18.

Wir untersuchen zunächst Gl. (7'). Entwickelt und nach Ordinaten y geordnet, lautet sie

$$y_1(\delta_{1,2}-\delta_{n,1})+y_2(\delta_{2,3}-\delta_{1,2})+y_3(\delta_{3,4}-\delta_{2,3}) + \ldots y_n(\delta_{n,1}-\delta_{n-1,n})=\Sigma\,\Delta\,S_{k,i}\cdot\cos\alpha_{k,i}\quad\ldots\quad(7'')$$

und mit Rücksicht auf die Zusammenhänge 3)

$$y_1(\tau_{1,n}-\tau_{1,2})+y_2(\tau_{2,1}-\tau_{2,3})+y_3(\tau_{3,2}-\tau_{3,4}) + \ldots y_n(\tau_{n,n-1}-\tau_{n,1})=\Sigma\,\Delta\,S_{k,i}\cdot\cos\alpha_{k,i}\quad\ldots\quad(9).$$

Setzen wir für die Ablenkungswinkel die Werte aus (1) ein, so geht aus Gl. (9) — nach Multiplikation mit J_c — die zweite Momentengleichung hervor:

$$\begin{aligned}M_{1,2}\,l_{1,2}(2y_1+y_2)&+M_{2,1}\,l_{1,2}(y_1+2y_2)\\ &+M_{2,3}\,l_{2,3}(2y_2+y_3)+M_{3,2}\,l_{2,3}(y_2+2y_3)+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+M_{n-1,n}\,l_{n-1,n}(2y_{n-1}+y_n)+M_{n,n-1}\,l_{n-1,n}(y_{n-1}\\ &+2y_n)+M_{n,1}\,l_{1,n}(2y_n+y_1)+M_{1,n}\,l_{1,n}(y_n+2y_1)\\ &+6\,EJ_c\,\Sigma\,\Delta\,S_{k,i}\cos\alpha_{k,i}=-6\,\Sigma\frac{l_{k,i}}{S_{k,i}^2}(y_k\,\mathfrak{S}_{i,k}\\ &+y_i\,\mathfrak{S}_{k,i})\quad\ldots\ldots\ldots\quad(10).\end{aligned}$$

In gleicher Weise erhält man aus Gl. (8') die dritte Momentengleichung:

$$\begin{aligned}M_{1,2}\,l_{1,2}(2x_1+x_2)&+M_{2,1}\,l_{1,2}(x_1+2x_2)\\ &+M_{2,3}\,l_{2,3}(2x_2+x_3)+M_{3,2}\,l_{2,3}(x_2+2x_3)+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+M_{n-1,n}\,l_{n-1,n}(2x_{n-1}+x_n)+M_{n,n-1},\,l_{n,1-n}(x_{n-1}\\ &+2x_n)+M_{n,1}\,l_{1,n}(2x_n+x_1)+M_{1,n}\,l_{1,n}(x_n+2x_1)\\ &-6\,EJ_c\,\Sigma\,\Delta\,S_{k,i}\sin\alpha_{k,i}=-6\,\Sigma\frac{l_{k,i}}{S_{k,i}^2}\\ &(x_k\,\mathfrak{S}_{i,k}+x_i\,\mathfrak{S}_{k,i})\quad\ldots\ldots\ldots\quad(11).\end{aligned}$$

Auch diese beiden Gleichungen sind Beziehungen zwischen den Eckmomenten und den angreifenden äußeren Kräften, in denen die Stabdrehwinkel nicht mehr vorkommen.

Wie leicht zu erkennen ist, stellen aber die Gleichungen 10) und 11) nichts anderes vor, als

$$\int My\frac{ds}{J}+\int\frac{N}{F}\cos\alpha=0\quad\ldots\quad(10')$$

und

$$\int Mx\frac{ds}{J}-\int\frac{N}{F}\sin\alpha=0\quad\ldots\quad(11'),$$

wobei M das Biegungsmoment und N die Normalkraft im Querschnitt x, y sind und die Integrale über den geschlossenen Rahmen ausgedehnt werden.

Zusammenfassung. Aus den Bleichschen Ansätzen lassen sich bei lauter steifen Ecken die Stabdrehwinkel allgemein eliminieren. Die dadurch hervorgehenden Momentengleichungen sind die entwickelte Form der (z. B. aus dem Satz der kleinsten Formänderungsarbeit berechenbaren) Elastizitätsgleichungen. Da für jeden geschlossenen Rahmen mit drei Überzähligen drei Gleichungen aufgestellt werden, bilanziert — nach dem vorhergehenden selbstverständlich — bei jedem ebenen Rahmentragwerk, das ja nur aus geschlossenen Rahmen zusammengesetzt sein kann, die Zahl der Gleichungen mit der der Überzähligen. Die Momente werden positiv eingeführt; bei den für zwei Rahmen gemeinsamen Stäben sind sie für einen Rahmen mit positivem, für den andern mit negativem Vorzeichen zu versehen, wenn man den Ansatz der Gleichungen von verschiedenen Seiten des Stabes vornimmt. Stoßen in einer Ecke des geschlossenen Rahmens nur zwei Stäbe zusammen, so ist das Moment links und rechts von der Ecke das gleiche. Bei einem z. B. in 1 und n eingespannten Stabzug wird, da das Querschnittsträgheitsmoment des hinzugedachten Stabes $1n$ unendlich groß ist, $l_{1,n}=l_{n,1}=0$. — In den Momentengleichungen drückt man, dem Bleichschen Verfahren entsprechend, die Eckmomente mittels der Gleichgewichtsbedingungen durch die erst jetzt zu wählenden Überzähligen aus und berechnet die Unbekannten. Die Lastglieder der Gleichungen, d. h. die Werte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}$ sind für verschiedene Angriffe ein für allemal zu bestimmen.

Düsseldorf. J. Ratzersdorfer. 53.

Ein einfaches Werkzeug für gewisse flächentreue Abbildungen der Ebene.

Zwei Punkte P und P' der Ebene seien starr miteinander verbunden. Die Beweglichkeit der Strecke PP' oder s soll nun so beschränkt werden, daß, sobald P irgend ein Flächenstück umläuft, allemal P' ein Flächenstück umschreibt, daß jenem an Inhalt gleich ist. Insbesondere werde noch verlangt, daß beide Flächenstücke in demselben Sinn umlaufen werden. Eine einfache geometrische Tatsache, die wir hier in aller Kürze nachweisen wollen, gestattet die Herstellung eines Werkzeuges, mittels dessen man die geforderte Art der Bewegung der Strecke PP' in allgemeinster Weise mechanisch verwirklichen kann.

Wir benutzen ein rechtwinkliges Achsenkreuz in der Ebene; der Punkt P habe die Koordinaten x, y, der Punkt P' die Koordinaten x', y'. Nun handelt es sich um eine gleichsinnig flächentreue Abbildung, bei der dem Punkte P der Punkt P' entspricht. Demnach sind unter x', y' solche Funktionen von x, y zu verstehen, die der Bedingung

$$\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}=1\quad\ldots\quad(1)$$

genügen. Ferner soll

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2=s^2=\text{konst.}\quad.\quad(2)$$

sein. Hieraus folgt durch Differentiation nach x und nach y:

$$\left.\begin{aligned}(x'-x)\left(\frac{\partial x'}{\partial x}-1\right)+(y'-y)\frac{\partial y'}{\partial x}&=0,\\ (x'-x)\frac{\partial x'}{\partial y}+(y'-y)\left(\frac{\partial y'}{\partial y}-1\right)&=0.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Nach (1) und (3) ist

$$(x'-x)^2\frac{\partial x'}{\partial y}+(y'-y)^2\frac{\partial y'}{\partial x}=0.\quad(4)$$

Mit der Strecke $s=PP'$ werde eine zu ihr senkrechte Gerade g starr verknüpft, etwa im Punkte Q (der übrigens auch auf der starren Verlängerung von PP' über P oder P' hinaus liegen darf). Die Koordinaten des Punktes Q sind mit Hilfe einer Konstante c durch

$$(1-c)\,x+cx'\quad\text{und}\quad(1-c)\,y+cy'$$

dargestellt. Die Gerade g hat in den laufenden Koordinaten X, Y die Gleichung

$$\frac{Y-(1-c)\,y-c\,y'}{X-(1-c)\,x-c\,x}=-\frac{x'-x}{y'-y},$$

die wegen (2) so geschrieben werden kann:

$$(x'-x)(X-x)+(y'-y)(Y-y)=cs^2 \quad (5).$$

Das Wesentliche ist nun der folgende Umstand: Da x', y' wie gesagt Funktionen von x, y sind, hängen die Koeffizienten dieser in X, Y linearen Gleichung (5) zunächst von zwei willkürlichen Veränderlichen x, y ab. Aber man kann nachweisen, daß dennoch durch (5) nur eine einfach unendliche Schar von Geraden g dargestellt wird. Da in (5) die Parameter x und y vorkommen, genügt es zu diesem Zwecke zu zeigen, daß diejenigen Gleichungen, die aus (5) durch Differentiation nach x und nach y entstehen, miteinander übereinstimmen. Es sind das die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}-1\right)(X-x)+\frac{\partial y'}{\partial x}(Y-y)-(x'-x)=0,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y}(X-x)+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}-1\right)(Y-y)-(y'-y)=0.$$

Multipliziert man die erste mit $y'-y$ und die zweite mit $x'-x$ und zieht man sie dann voneinander ab, so kommt:

$$\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}-1\right)(y'-y)-\frac{\partial x'}{\partial y}(x'-x)\right](X-x)+$$
$$\left[\frac{\partial y'}{\partial x}(y'-y)-\left(\frac{\partial y'}{\partial y}-1\right)(x'-x)\right](Y-y)=0.$$

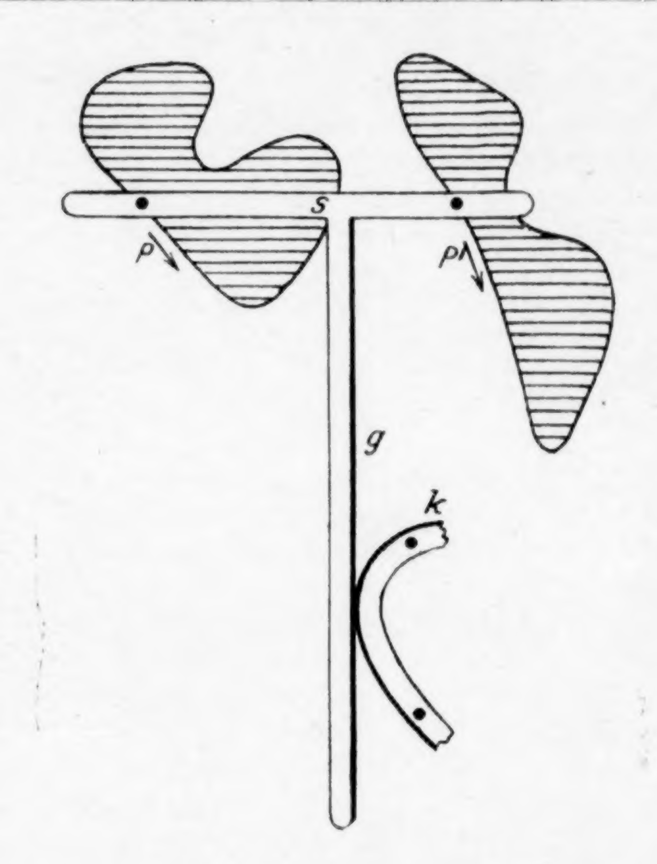
Vermöge (3) geht diese Gleichung über in

$$\left[(x'-x)^2\frac{\partial x'}{\partial y}+(y'-y)^2\frac{\partial y'}{\partial x}\right]\left[(y'-y)(X-x)\right.$$
$$\left.-(x'-x)(Y-y)\right]=0,$$

und dies ist wegen (4) in der Tat eine Identität.

Da demnach die Schar der Geraden g, die mit der Strecke PP' oder s in allen ihren Lagen starr verknüpft sind, nur einfach unendlich ist, besteht sie aus allen Tangenten einer gewissen Kurve k. Dieser Umstand liefert das folgende sehr einfache Werkzeug zur Herstellung aller derjenigen gleichsinnig flächentreuen Abbildungen, bei denen die Entfernung zwischen einander entsprechenden Punkten P und P' eine konstante Länge s hat:

Mit einer starren Schiene g — siehe die Abbildung — wird eine zweite starre Schiene s



senkrecht und fest verknüpft. Auf dieser Schiene werden zwei Punkte P und P' beliebig, aber bestimmt angenommen. Der Punkt P dient als Fahrstift, der Punkt P' als Schreibstift. Man wähle nun irgend eine Kurve k in der Ebene, etwa die äußere Kante eines fest auf der Zeichenebene angebrachten Kurvenlineals. Dann bewege man das Stabpaar g, s so, daß g beständig die Kurve k berührt. Läßt man den Punkt P irgend ein Flächenstück umlaufen, so umschreibt P' im gleichen Umlaufsinne ein zweites Flächenstück, das denselben Inhalt wie jenes hat. Man kann nämlich, worauf wir nicht eingehen wollen, leicht zeigen, daß die Kurve k in der Tat ganz beliebig angenommen werden darf. Insbesondere kann man die Kurve auch durch einen Punkt ersetzen.

Möglicherweise ist dies Werkzeug zur Herstellung flächentreuer Abbildungen gelegentlich schon von anderen angegeben worden. Mir ist allerdings davon nichts bekannt. Jedenfalls bemerke ich dann, daß im Vorhergehenden gezeigt worden ist, daß man mittels dieses Werkzeuges überhaupt alle gleichsinnig flächentreuen Abbildungen bekommt, bei denen die Entfernung zwischen einander entsprechenden Punkten eine konstante Länge hat.

Berlin-Dahlem, 7. August 1921.

Georg Scheffers. 102.

NACHRICHTEN

Die angewandte Mathematik und Mechanik auf der Tagung in Jena. Der Verlauf der Tagung, über deren Programm in früheren Heften berichtet wurde, erfüllte vollauf die Erwartung, daß hier zum erstenmal im Rahmen der jährlich wiederkehrenden Mathematiker- und Physikerversammlungen die angewandte Mathematik und Mechanik in größerem Ausmaß und ziemlich geschlossen zur Geltung kommen sollte. Drei größere Berichte, die erstattet wurden von Dr. Jaffé-Leipzig über „Unstetige und mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen", von Dr. Hencky-Dresden über „Numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen in der Technik" und von Prof. L. Föppl-

Dresden über „Neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Elastizitätstheorie“, werden vollständig in dieser Zeitschrift zum Abdruck gelangen.[1])

Die der angewandten Mathematik gewidmete Sitzung der Mathematiker-Vereinigung am 20. September eröffnete unter dem Vorsitz von Geheimrat Prof. Runge-Göttingen ein Vortrag von Prof. v. Mises-Berlin, „Über die gegenwärtige Krise der Mechanik“. Der Vortragende führte in ganz kurzer Skizze aus, daß es rein mechanische Probleme von praktischer Wichtigkeit gebe, die sich einer Erklärung im Sinne der klassischen Mechanik dauernd zu entziehen scheinen und den Aufbau einer auf der rationellen Wahrscheinlichkeitsrechnung begründeten, geschlossenen Theorie der mechanischen Statistik erfordern.[2]) Großes Interesse fand nach dem Referat von Dr. Jaffé eine Gruppe von Vorträgen, die dem Turbulenzproblem gewidmet waren. Dr. Schiller-Leipzig, teilte Ergebnisse seiner Untersuchungen in dem Prandtlschen Laboratorium in Göttingen mit, durch die unsere bisherigen Kenntnisse über die sogenannte kritische Geschwindigkeit bestätigt und ergänzt werden und durch die manche Widersprüche früherer Versuchsreihen Aufklärung gefunden haben.[2]) Prof. Prandtl-Göttingen erstattete eine vorläufige Mitteilung über eine begonnene theoretische Untersuchung, aus der hervorgeht, daß die laminare Bewegung zwischen zwei parallelen ruhenden Wänden, oder auch längs einer, sich bei hinreichend großen Geschwindigkeiten als instabil erweist, wenn man unter Zugrundelegung der nach dem Vorgang von Lord Rayleigh ermittelten reibungslosen Bewegung die Zähigkeitswirkungen in erster Ordnung berücksichtigt. Prof. v. Kármán-Aachen teilte seine in Heft 4 dieser Zeitschrift schon veröffentlichten Überlegungen mit, die durch eine passende Abänderung der Prandtlschen Grenzschichtentheorie einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Erscheinungsformen des hydraulischen Widerstandes nachzuweisen gestatten; er schloß daran einige Andeutungen über eine statistische Theorie der Turbulenz, die in der Richtung der auch von v. Mises in seinem Eröffnungsvortrage ausgesprochenen Forderung gelegen ist.

In der Fortsetzung der Sitzung unter Vorsitz von Prof. v. Mises sprach Prof. Hopf-Aachen über die theoretische Lösung einer praktischen Aufgabe der Grundwasserbewegung, die für die Verwertung der sogenannten Moose in Süddeutschland von Wichtigkeit zu sein scheint.[3]) Prof. Reißner-Charlottenburg gab eine wertvolle Ergänzung zur neueren Tragflächen- und Propellertheorie, indem er den Nachweis für die Möglichkeit einer Helmholtzschen Wirbelschicht von der Gestalt einer Schraubenfläche erbrachte. In zwei Parallelsitzungen am Nachmittag unter Vorsitz von Prof. Hamel-Charlottenburg bezw. Prof. Reißner wurden die eben erwähnten Referate von Hencky und Föppl erstattet. Sodann wies Prof. Runge in einem kurzen Vortrage auf die Wichtigkeit der Vektoranalysis für die Behandlung von Problemen der Mechanik und Geometrie hin. Prof. Winkelmann-Jena zeigte den Nutzen der Verwendung eines „reziprokalen“ Vektors für die Einführung der einfacheren Begriffe der Vektordifferentiation, die auf diese Weise elementarer gewonnen werden kann, als in der üblichen Darstellung.

In einer Sitzung der Gesellschaft für Technische Physik am 22. September sprach Prof. Knoblauch-München über die spezifische Wärme des überhitzten Dampfes bei hohen Drucken und Dr. R. Becker-Berlin über die thermomechanische Theorie der Detonation von Sprengstoffen. Weiterhin wiederholten Dr. Schiller und Prof. Prandtl ihre Vorträge. Prof. v. Kármán teilte die Grundlagen seiner Ansätze über turbulente Flüssigkeitsbewegung und Wärmeübertragung mit, wie sie in dem Aufsatz von Latzko in Heft 4 dieser Zeitschrift weiter ausgeführt erschienen. Herr Dieselhorst-Braunschweig führte einige Demonstrationsapparate für den Unterricht in der technischen Mechanik, besonders über kritische Wellendrehzahlen und über Lagerreibung vor.

Am Mittwoch, den 21. September fand die auf Anregung von Prof. Prandtl einberufene Besprechung der Vertreter der angewandten Mathematik und Mechanik statt, in der über die weitere Gestaltung der wissenschaftlichen Jahresversammlung beraten wurde. Einmütig kam die Ansicht zum Ausdruck, daß der in diesem Jahre erreichte Zustand noch nicht allen Wünschen entspricht, und daß ein unmittelbarerer Einfluß auf die Festsetzung der Tagesordnungen ausgeübt werden müsse. Der Ausschuß der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hatte beschlossen, auch in Zukunft einen Sitzungstag den Anwendungen einzuräumen und die Gesellschaft für Technische Physik erklärte sich bereit, Vorträgen aus dem Gebiete der technischen Mechanik nach Möglichkeit Raum zu gewähren. Die Versammlung beschloß, vorläufig von der Gründung einer besonderen Organisation abzusehen und einen Ausschuß einzusetzen, der die nächstjährige Tagung vorbereiten und zur Feststellung der Tagesordnung mit den beiden genannten Gesellschaften in Verbindung treten soll. In den Ausschuß wurden gewählt: Prof. v. Mises-Berlin, Prof. Prandtl-Göttingen und Prof. Reißner-Charlottenburg. Jeder dieser Herren ist bereit, schon jetzt Anregungen aus Fachkreisen für das Programm der nächstjährigen Tagung, die im Rahmen der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte im September 1922 in Leipzig stattfinden wird, entgegenzunehmen.

Mathematischer Reichsverband. Im Anschluß an den Mathematiker- und Physikertag in Jena fand die erste Jahressitzung des Reichsverbandes Deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine unter Vorsitz von Prof.

[1]) Vgl. dieses Heft, S. 398—410.

[2]) Ausführlichere Wiedergabe in einem der nächsten Hefte.

[3]) Vgl. Hopf und Trefftz, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 290—298.

Hamel-Charlottenburg statt. Darin kam unter anderem auch die in dieser Zeitschrift mehrfach behandelte Frage der Oberlehrerausbildung an den technischen Hochschulen zur Sprache. Der Berichterstatter, Prof. Rothe-Charlottenburg, gab zunächst den hier schon mitgeteilten Erlaß des Unterrichtsministers, sowie eine weitere Verfügung bekannt, durch die die Prüfungsordnung eine Abänderung erfahren hat. Die Änderung besteht hauptsächlich darin, daß zu den bisherigen sechs Wahlfächern, in denen der Kandidat für die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik nach eigener Wahl weitergehende Kenntnisse nachzuweisen hat, die „Technischen Wissenschaften" hinzugetreten sind (nachdem bereits „Angewandte Mechanik" sowie „Geodäsie" darin vorkamen) und daß die Anforderungen in diesen Fächern mehr nach der praktischen Seite hin präzisiert wurden. Er gab dann ein reich ausgestaltetes Bild von den Absichten und Plänen, mit denen die Hochschule in Charlottenburg an die Erfüllung ihrer neuen Aufgabe herantreten will. In der Aussprache wurde die Übertragung der Ausbildungsberechtigung an die Technischen Hochschulen Preußens allseitig begrüßt. Prof. Ludwig-Dresden und Prof. K. T. Fischer-München machten Mitteilungen über die an ihren Hochschulen mit der Lehrerausbildung gewonnenen Erfahrungen, die nicht ganz mit den vom Berichterstatter entwickelten Anschauungen übereinstimmen. Einstimmig angenommen wurde der Antrag von Prof. Bieberbach-Berlin einen Ausschuß einzusetzen, der die verschiedenen Prüfungsordnungen studieren und Vorschläge zu ihrer Verbesserung erstatten soll. — Es wäre nur zu wünschen, daß der Reichsverband diese Aufgabe energisch in die Hand nimmt und sich so einmal in nützlicher Weise zur Geltung bringt, nachdem er in der Angelegenheit der Ausbildungsberechtigung der Technischen Hochschulen und der damit verknüpften Änderung der Prüfungsordnung vor vollendete Tatsachen gestellt worden ist.

113.

Einführung einer einheitlichen Vektor-Schreibweise. Der Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen stellt den Entwurf XX, Bezeichnungen für Vektorengrößen, zur Beratung und lädt die beteiligten Vereine ein, ihm das Ergebnis ihrer Beratungen bis Mitte Januar 1922 mitzuteilen. Zur gleichen Frist kann auch jedes Mitglied der beteiligten Vereine, wie auch sonst jedermann, sich zu dem Entwurf äußern.

Der Entwurf lautet:

1. Vektoren werden mit (kleinen oder großen) Frakturbuchstaben bezeichnet: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ Zusatz 1: In besonderen Fällen können Vektoren auch durch Ueberstreichen gekennzeichnet werden, z. B.: $\bar{r}$, $\bar{\omega}$. Zusatz 2: Soll ein Vektor durch seinen Anfangspunkt A und seinen Endpunkt B dargestellt werden, so schreibt man $\overrightarrow{AB}$.

2. Der Betrag des Vektors $\mathfrak{A}$ wird mit $|\mathfrak{A}|$ bezeichnet; wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, auch mit A.

3. Der zum Vektor $\mathfrak{A}$ gehörige Einheitsvektor wird mit $\mathfrak{A}^0$ bezeichnet: $\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\, \mathfrak{A}^0$. In besonderen Fällen kann der Einheitsvektor auch mit dem entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet werden: $\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\, \mathfrak{a}$.

4. Zur Darstellung der Vektorsummen Vektordifferenzen dienen die gewöhnlichen Plus- und Minuszeichen: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$.

5. Das skalare Produkt zweier Vektoren wird dadurch bezeichnet, daß man die beiden Vektoren nebeneinander schreibt: $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Nötigenfalls sind Vektorsummen, Vektordifferenzen und skalare Produkte in runde Klammern einzuschließen: $\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}$. Skalare Faktoren können auch durch einen Punkt abgetrennt werden: $\mathfrak{A}\mathfrak{B}.\,\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}$. Zusatz: $\mathfrak{A}^2$ bedeutet das skalare Produkt des Vektors $\mathfrak{A}$ mit sich selbst.

6. Das Vektorprodukt zweier Vektoren wird dadurch bezeichnet, daß man die beiden Vektoren nebeneinander schreibt und in eckige Klammern einschließt: $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})]$. Zusatz: Das Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ kann durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ bezeichnet werden.

7. Für den Gradienten des Skalars φ, für die Divergenz und den Rotor des Vektors $\mathfrak{A}$ werden die Bezeichnungen $\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \mathfrak{A}$, $\operatorname{rot} \mathfrak{A}$ benutzt. Zusatz 1: Der Rotor des Rotors von $\mathfrak{A}$ wird mit $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ bezeichnet. Zusatz 2: Soll von dem skalaren Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der Gradient gebildet, dabei aber nur $\mathfrak{A}$ als veränderlich, $\mathfrak{B}$ als konstant betrachtet werden, so wird dies durch $\operatorname{grad}_{\mathfrak{A}} (\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ ausgedrückt.

8. Der Hamiltonsche Operator wird mit ∇ (sprich Nabla) bezeichnet. Wenn seine Anwendung auf Gradienten, Divergenzen, Rotoren führt, sind in den Rechnungsergebnissen die in 7. vorgeschlagenen Bezeichnungen zu bevorzugen. ∇^2 kann durch Δ ersetzt werden. Zusatz: Wenn in $\nabla (\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ nur der Vektor $\mathfrak{A}$ als veränderlich, $\mathfrak{B}$ als konstant betrachtet werden soll, so wird dies durch $\nabla_{\mathfrak{A}} (\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ ausgedrückt; das gleiche gilt in entsprechenden Fällen bei anderen Produktbildungen mit ∇.

9. Die an Unstetigkeitsflächen (Sprungflächen) den Begriffen $\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \mathfrak{A}$, $\operatorname{rot} \mathfrak{A}$ und ∇ entsprechenden Differenzenbildungen werden mit $\operatorname{Grad} \varphi$, $\operatorname{Div} \mathfrak{A}$, $\operatorname{Rot} \mathfrak{A}$ (große Anfangsbuchstaben) und $\dot{\nabla}$ bezeichnet.

10. Die Grundvektoren (drei zueinander senkrechte Einheitsvektoren) werden mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ bezeichnet.

11. Die vektorielle Projektion eines Vektors $\mathfrak{A}$ auf einen andern $\mathfrak{B}$ wird mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$, die vektorielle Projektion auf eine Gerade x mit $\mathfrak{A}_x$ bezeichnet, dagegen die skalaren Komponenten in bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit A_x, A_y, A_z. Wenn die Richtungen

von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ mit denen der Achsen x, y, z übereinstimmen, so ist

$$\mathfrak{A}_x = A_x \mathfrak{i},\ \mathfrak{A}_y = A_y \mathfrak{j},\ \mathfrak{A}_z = A_z \mathfrak{k};$$
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{A}_y + \mathfrak{A}_z = A_x \mathfrak{i} + A_y \mathfrak{j} + A_z \mathfrak{k}.$$

Zusatz: In besonderen Fällen können die skalaren Komponenten auch mit andern passend gewählten lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet werden:

$$r = x \mathfrak{i} + y \mathfrak{j} + z \mathfrak{k};\ \overline{\omega} = p \mathfrak{i} + q \mathfrak{j} + r \mathfrak{k}.$$

Aus den Erläuterungen, die von Fr. Breisig, Fr. Emde, Hamel, E. Jahnke, A. Korn, Reißner, R. Rothe und K. W. Wagner gezeichnet sind, heben wir hervor:

Allgemeines. Bei der Auswahl der Bezeichnungen der Vektoranalysis war in erster Linie die Rücksicht auf die Anwendung auf Geometrie, Mechanik, Physik und Technik maßgebend. In der Mehrzahl stimmen die vorgeschlagenen Bezeichnungen mit denen überein, die sich für diese Zwecke in Deutschland seit etwa 25 Jahren am meisten verbreitet haben.

Zu 1. Die Bezeichnung der Vektoren durch Frakturbuchstaben nach dem Vorbilde Maxwells ist jetzt in Deutschland die bei weitem gebräuchlichste geworden. Sie ist auch in Schrift und Druck bequem. Fett gedruckte lateinische Buchstaben, die ebenfalls häufig angewendet werden, sind zwar im Druck brauchbar, aber sie können schriftlich nicht einfach genug wiedergegeben werden. Die Bezeichnung durch überstrichene Buchstaben nach dem Vorgange Resals und Heuns auch im Druck eignet sich für manche besonderen Zwecke z. B. dann, wenn für den Betrag eines Vektors ein bestimmter Buchstabe im Gebrauch ist, durch dessen Überstreichen man bequem den Vektor selbst bezeichnen kann.

Zu 5. Die runden Klammern dienen hier zur Zusammenfassung, wie es in der skalaren Algebra üblich ist; die eckigen Klammern sind jedoch für diesen Zweck niemals zu benutzen, da sie ausschließlich zur Bezeichnung des Vektorproduktes (vergl. 9) zu dienen haben.

Zu 6. Die eckige Klammer für das Vektorprodukt soll, der Einheitlichkeit wegen, auch dann benutzt werden, wenn die Vektoren durch überstrichene Buchstaben bezeichnet sind: $[r\ \overline{\omega}]$.

Zu 8. Es ist einstweilen davon abgesehen worden, Vorschläge für den Gebrauch des Operators ∇ zu machen, die über seine Verwendung in den einfachsten Fällen hinausgehen. Bei dem folgerichtigen Gebrauch des Zeichens ∇ als Vektor nach den Regeln der Vektoranalysis entstehen bekanntlich eigentümliche Schwierigkeiten, die darauf beruhen, daß der Operator ∇ nicht nur als Vektor, sondern auch als Differentiator auf die mit ihm verbundenen Skalare und Vektoren einwirkt. In dieser Beziehung gehen aber die Gebräuche der einzelnen Autoren zum Teil noch sehr weit auseinander. Zwar wird mit wenigen Ausnahmen aus der skalaren Differentialrechnung die Regel übernommen, daß ∇ als Differentiator nicht auf die links von ihm befindlichen Skalare oder Vektoren einwirkt. Daraus ergibt sich für den Vektor ∇, daß weder für die skalare Multiplikation das kommutative, noch für die vektorielle das antikommutative Gesetz gilt, daß vielmehr in jedem Falle die Stellung des Vektors ∇ als Faktor in einem Produkt beizubehalten ist. Aber es ist nun weiter die Frage, soll der Differentiator ∇, wie es entsprechend in der gewöhnlichen Differentialrechnung üblich ist, nur auf den unmittelbar rechts auf ihn folgenden Faktor einwirken, oder auf die sämtlichen rechts auf ihn folgenden und mit ihm multiplikativ verbundenen Faktoren? Beide Festsetzungen sind verfochten worden.

Im ersten Falle wird es erforderlich sein, einen aus mehreren Faktoren zusammengesetzten Ausdruck, auf den ∇ als Differentiator wirken soll, durch eine besondere Klammer zusammenzufassen, die aber zu Verwechslungen mit den Klammern des skalaren und der vektoriellen Multiplikation keinen Anlaß geben darf. Ferner ergibt sich alsdann die ungewohnte Erscheinung, daß die Klammern nicht nur ineinandergeschachtelt werden, sondern auch verkettet auftreten können.

Im zweiten Falle muß man ein besonderes Zeichen einführen, durch das diejenigen rechts auf ∇ folgenden Faktoren gekennzeichnet werden, auf die ∇ nicht differentiierend einwirken soll. Aber ein solches Zeichen reicht besonders bei wiederholter Anwendung der ∇-Operation nicht immer aus. In einfachen Fällen genügt dafür die Andeutung der partiellen Differentiation durch den als Index an ∇ angefügten variablen Vektor (Zusatz 2), auf den ∇ differentiierend wirken soll. Häufig gelingt es auch, durch Anwendung der Multiplikationsregeln, diejenigen rechts von ∇ stehenden Faktoren, auf die ∇ nicht einwirken soll, auf die linke Seite von ∇ zu schaffen. Der Operator ∇ soll nur auf solche Größen angewendet werden, die von nicht mehr als einem Ortsvektor abhängen.

Zu 11. Wenn ein Vektor $\mathfrak{A}$ auf die drei Geraden x, y, z, die zueinander rechtwinklig seien, aber zunächst noch nicht gerichtet zu sein brauchen, projiziert wird, so entstehen drei neue Vektoren $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ die vektoriellen Komponenten von $\mathfrak{A}$, deren Summe der Vektor $\mathfrak{A}$ ist. Sind weiter x, y, z zueinander rechtwinklige gerichtete Achsen und ist $\mathfrak{A}_x = +|\mathfrak{A}_x|$, wenn die x-Achse und die Achse des Vektors $\mathfrak{A}_x$ gleich gerichtet sind, dagegen $A_x = -|\mathfrak{A}_x|$, wenn die beiden Achsen zueinander entgegengesetzt gerichtet sind, so heißt A_x die skalare Komponente des Vektors $\mathfrak{A}$ inbezug auf die x-Achse. Entsprechendes gilt für die skalaren Komponenten A_y, A_z. Es ist wesentlich, diesen nicht immer scharf auseinandergehaltenen Unterschied auch durch die Bezeichnung festzuhalten: die vektoriellen Komponenten ($\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$) durch den mit Index versehenen Vektor, im Gegensatz zu den skalaren Komponenten (A_x, A_y, A_z), für die nicht deutsche Buchstaben zu benutzen sind.

Technisch-Wissenschaftliches Vortragswesen Berlin. Unter diesem Namen haben sich folgende Vereine und Körperschaften zur Förderung der Ingenieurausbildung unter dem Vorsitz von Direktor Dr. Lasche zusammengeschlossen: Arbeitsgemeinschaft deutscher Betriebsingenieure, Arbeitsgemeinschaft Technik in der Landwirtschaft, Berliner Bezirksverein des V. d. I., Deutsche Beleuchtungstechnische Gesellschaft, Deutsche Gesellschaft für Bauingenieurwesen, Deutsche Gesellschaft für Metallkunde, Deutsche Gesellschaft für technische Physik, Elektrotechnischer Verein, Verein deutscher Ingenieure. — Das neue Verzeichnis der Vorlesungen und Uebungen ist soeben erschienen. Es enthält in einem Vorwort die von Dr. Lasche aufgestellten und vom Deutschen Verband Technisch-Wissenschaftlicher Vereine angenommenen Leitsätze für das Vortragswesen, die eine gedeihliche Entwicklung unserer Lehrmittel bzw. unseres Vortragswesens versprechen. Das Verzeichnis umfaßt entsprechend der Zusammenstellung des T. W. V. neben fachwissenschaftlichen Vorlesungen, die allen Richtungen Rechnung tragen, auch solche, die der allgemeinen Ingenieurfortbildung dienen. Es ist zum Preise von 1 ℳ durch die Geschäftsstelle des T. W. V., Berlin NW. 7, Sommerstr. 4a, und durch den technischen Buchhandel zu beziehen.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Berechnung dünner Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit. In dem Aufsatze von Dr. H. Hencky in Heft 2 dieser Zeitschrift (Bd. 1, 1921, S. 81—89) fiel mir das unwahrscheinliche Ergebnis auf, daß am Rande der behandelten Platte auch Druckkräfte auftreten. Bei sorgfältiger Prüfung fand ich, daß die Berechnung auf der irrtümlichen Annahme aufgebaut ist, daß die Dehnungen in symmetrisch zur Diagonale liegenden Punkten gleich seien, $\varepsilon_{uv} = \varepsilon_{vu}$ (S. 83, Z. 24 v. o.). Ich fand nun folgenden Weg zur Berechnung rechteckiger Platten ohne Biegungssteifigkeit mit symmetrischer Belastung: Man ersetzt die bekannten Differentialgleichungen der Platte durch Differenzengleichungen, führt die Randbedingungen und die Gleichungen für die Dehnungen der Netzlinien ein, erhält ein mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmendes System von Gleichungen, die für die Spannungskräfte linear sind, während die Durchbiegungen auch in zweiter Potenz auftreten. Die Lösung gelingt durch Annahme von beliebigen Durchbiegungen, Berechnung der Spannkräfte und Belastungen und Vergleich dieser mit der gegebenen Belastung. Durch Änderung der Durchbiegungen kommt man schnell auf die gewünschte Lösung.

Hildesheim. 94.

Dipl.-Ing. Constantin Weber.

Erwiderung. In meinem Aufsatz über die Berechnung dünner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit ist tatsächlich ein Versehen in den Randbedingungen enthalten, und ich bin Herrn Dipl.-Ing. C. Weber aus Hildesheim sehr dankbar, mich freundlicher Weise darauf aufmerksam gemacht zu haben. Infolge der Symmetrie zur Halbierungslinie ist nicht (S. 83) $(\varepsilon_y)_{uv} = (\varepsilon_y)_{vu}$, sondern natürlich $(\varepsilon_y)_{uv} = (\varepsilon_x)_{vu}$. Die beiden Gleichungen, welche die Dehnung der sich in Diagonalpunkten kreuzenden Netzlinien ausdrücken, sind daher bei der quadratischen Platte vollständig identisch. Nach Substitution der Spannungsresultanten und Elimination derselben mittels der Spannungsfunktion ω läßt sich die richtig gestellte Randbedingung (9a) in folgender Form schreiben (v. S. 83)

$$\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\tau_{nv} + \omega_{0,v-1} - 2\,\omega_{0v} + \omega_{0,v+1}$$

$$-\frac{2}{m}(\omega_{1v} - \omega_{0v}) + 2\sum_{1,v}^{n-1,v}\left(\Delta_y^2\,\omega - \frac{1}{m}\Delta_x^2\,\omega\right)$$

$$= \Sigma\,(\zeta_{iv} - \zeta_{i+1,v})^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9\,a).$$

Die Randbedingungen (9b) bleiben richtig, man schreibt sie aber jetzt besser in der Form

$$\tau_{nv} = \frac{m+1}{m}(\omega_{n,v-1} - 2\,\omega_{nv} + \omega_{n,v+1}) \quad (9\,b)$$

und benutzt sie dazu, die Werte τ_{nv} in (9a) zu eliminieren.

Im übrigen gründet sich die in meiner Abhandlung benutzte Methode nicht auf die Form der Randbedingungen, sondern auf die charakteristischen Eigenschaften des Gleichungssystems (7a), (7b), (7c) und ist in der Tat auch auf ganz andere Randbedingungen anwendbar. Der Wert der Methode wird daher durch diese Berichtigung nicht berührt, auch der Charakter der elastischen Fläche bleibt im wesentlichen derselbe, wie er sich aus der Gegenüberstellung der Abbildungen 5a und 5b ergibt. Dagegen ändern sich die numerischen Ergebnisse und die Verteilung der Spannungen über den Rand wesentlich gegen die in den Abb. 4a und 4b dargestellte Verteilung.

Die von Herrn Weber vorgeschlagene Form der allmählichen Näherung ist als Spezialfall in Gleichung (7c) enthalten und von mir selbst benutzt worden. Mit wachsender Unterteilung des Netzes nimmt jedoch die Konvergenz derart ab, daß man auf die Auflösung des Gleichungssystems (7c) angewiesen ist. Es liegt dies daran, daß bei sehr vielen Netzpunkten das Verhältnis der Ausbiegungen ebenso ins Gewicht fällt wie die Amplitude der Ausbiegungen. Aus diesem Grunde habe ich von einer Erwähnung dieser naheliegenden Methode abgesehen. Man wendet jetzt zweimal das Gleichungssystem (11) (S. 89) als Operator auf die Belastungswerte $\varkappa$ und die Spannungsresultantensummen τ an und erhält die Spannungsfunktion ω ausgedrückt als Funktion der Randwerte $\omega_b, \omega_c \ldots$, worauf Gleichung (9a) angewendet werden kann zur Berechnung der Randwerte von ω.

Im folgenden sei die Rechnung für $n=2$ kurz angegeben, während wir uns für $n=3$

mit Angabe der wesentlichen Resultate begnügen wollen.

Mit $\zeta_1 = 0{,}723$, $\zeta_2 = 0{,}577$, $\zeta_3 = 0{,}480$ erhält man die Belastungswerte (vergl. Gl. 7a)

$$\varkappa_1 = 0{,}0853, \quad \varkappa_2 = 0{,}0836, \quad \varkappa_3 = 0{,}1140.$$

Mit (11) (S. 84) wird

$$\tau_1 = 0{,}1023 + 0{,}5\,\tau_a + 0{,}5\,\tau_b,$$
$$\tau_2 = 0{,}08096 + 0{,}5\,\tau_a + 0{,}5\,\tau_b,$$
$$\tau_3 = 0{,}06898 + 0{,}25\,\tau_a + 0{,}75\,\tau_b.$$

Durch nochmalige Anwendung von (11) mit (9b)

$$\omega_1 = -0{,}096087 - 0{,}5\,\tau_a - 0{,}625\,\tau_b + 0{,}5\,\omega_b,$$
$$\omega_2 = -0{,}070512 - 0{,}375\,\tau_a - 0{,}500\,\tau_b + 0{,}5\,\omega_b,$$
$$\omega_3 = -0{,}052510 - 0{,}25\,\tau_a - 0{,}4375\,\tau_b + 0{,}75\,\omega_b,$$
$$\omega_1 = -0{,}09609 + 0{,}825\,\omega_b - 0{,}8125\,\omega_c,$$
$$\omega_2 = -0{,}07051 + 0{,}825\,\omega_b - 0{,}6500\,\omega_c,$$
$$\omega_3 = -0{,}05251 + 1{,}238\,\omega_b - 0{,}5690\,\omega_c.$$

Die Gleichung (9a) liefert nach Einsetzen der Werte ω_1, ω_2, ω_3

$$4{,}513\,\omega_b + 0{,}259\,\omega_c = 0{,}2735,$$
$$-4{,}351\,\omega_b + 2{,}306\,\omega_c = 0{,}1574.$$
$$\omega_a = 0; \quad \omega_b = +0{,}0533; \quad \omega_c = +0{,}1715$$
$$\omega_1 = -0{,}1915; \quad \omega_2 = -0{,}1381; \quad \omega_3 = -0{,}0842.$$

Das Gleichungssystem (7c) wird mit diesen Werten

$$\zeta_1\,6{,}84 - \zeta_2\,6{,}84 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,= 1,$$
$$-\zeta_1\,1{,}725 + \zeta_2\,6{,}16 - \zeta_3\,2{,}71 = 1.$$
$$-\zeta_1\,0{,}04 - \zeta_2\,2{,}676 + \zeta_3\,5{,}352 = 1.$$

Durch Einsetzen der Ausgangswerte überzeugt man sich leicht, daß die Verbesserungen unwesentlich sind.

Die Durchbiegung in der Mitte wird jetzt größer und stimmt ziemlich gut mit dem von A. und L. Föppl in Drang und Zwang Bd. 1, S. 229 auf anderem Wege hergeleiteten Wert überein. Für $n = 3$ läßt sich die Aufgabe in derselben Weise lösen. Die Verteilung der Spannungen am Rand ist annähernd parabolisch, in den Ecken ist keine Normal-Spannung vorhanden.

Über die Konvergenz des Verfahrens gibt am besten die folgende Tabelle Aufschluß, welche zeigt, daß man sich bei Anwendung der Differenzenrechnung nicht auf eine einzige bestimmte Maschenweite beschränken darf.

Differenzenlängen a/n	$a/1$	$a/2$	$a/3$ [1]	Dimension
Spannung T_x in Randmitte	0,290	0,427	0,458	$\sqrt[3]{Ehp^2a^2}$
Spannung T_x in Plattenmitte	0,421	0,428	0,436	$\sqrt[3]{Ehp^2a^2}$
Durchbiegung in Plattenmitte	0,638	0,723	0,716	$a\sqrt[3]{\frac{pa}{Eh}}$

Dresden, den 23. Juli 1921.

H. Hencky. 94a

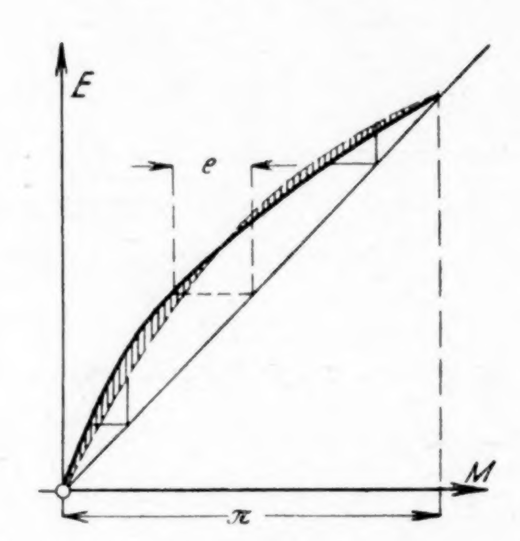
Zum Keplerschen Problem. Die aus dem Nachlasse Mohrs veröffentlichten Betrachtungen in Heft 3 veranlassen mich, auf folgende sehr einfache Überlegung hinzuweisen, die das Näherungsverfahren bei der Bestimmung der exzentrischen Anomalie überflüssig macht.

Sei M die mittlere und E die exzentrische Anomalie, sowie e die numerische Exzentrizität der Planetenbahn, so lautet die Keplersche Gleichung:

$$M = E - e \,.\, \sin E \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Sie wird durch die ausgezogene Kurve der Abbildung dargestellt. Wegen der Kleinheit von e (bei der Erde 0,016771) sind M und E nur wenig verschieden, und man kann näherungsweise schreiben:

$$E = M + e \,.\, \sin M \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$



Vergl. die strichpunktierte Kurve. Laut Abbildung hat der übrigbleibende Fehler mit großer Näherung die Form $a \,.\, \sin 2M$, so daß also wird:

$$E = M + e \sin M + a \cdot \sin 2M \quad . \quad (3).$$

a bestimmt man etwa durch Einsetzen der Werte für $E = \frac{\pi}{4}$; laut (1) ist dann

$$M = \frac{\pi}{4} - \frac{e}{2}\sqrt{2}\,.$$

Durch Einsetzen in (3) kommt, wenn $\sin e = e$ und $\cos e = 1$ gesetzt wird:

$$a = \frac{e^2}{2}\,.$$

Man bekommt so die drei ersten Glieder der bekannten Reihe von Lagrange, die selbst für astronomische Zwecke meistens ausreichen.

Der Fehler von (3) ist für $E = \frac{\pi}{2}$ nur von der Größenordnung einer Bogensekunde. — Dies Verfahren erübrigt die Anwendung sukzessiver Näherung.

Hamburg. Dr. Bock. 93

[1] Die Werte für $a/3$ lassen sich mittels Rechenschiebers nicht mehr ermitteln.
Die Werte ζ werden $\zeta_1 = 0{,}716$, $\zeta_2 = 0{,}651$, $\zeta_3 = 0{,}605$, $\zeta_4 = 0{,}434$, $\zeta_5 = 0{,}421$, $\zeta_6 = 0{,}391$.

(Redaktionsschluß 28. Oktober 1921.)

Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.